Ejercicios de matrices

1. Escribe la matriz $(a_{ij})_{3\times 4}$ que cumple: $a_{ij} = 0$ si $i = j$, $a_{ij} = 1$ si $i< j$, $a_{ij} = -1$ si $i> j$.

2. En una tienda se venden cajas de leche de 1,2,3,4 y 5 litros. El precio de cada una de ellas es 90, 170, 250, 325 y 400 pesetas, respectivamente. Ordena estos datos en una matriz.

3. En la expresión A x B = C, la matriz B es de orden 3 x 5 y C es de orden 2 x 5. ¿De qué orden es A?

4. ¿Cuánto ha de valer *a* para que

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

5. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

efectúa todos los posibles productos entre ellas. (Incluyendo D x D, hay 6 posibles multiplicaciones).

6. Dadas las matrices: A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ calcula

(a) A + B; ***(b)***B + A; ***(c)*** A - B; ***(d)*** 3A - 2B; ***(e)*** A . B

7. Dadas las matrices

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Efectúa los productos A . B, B . A, A'.B, A.B', B'.A, (A.B)'.

A la vista de los resultados, ¿qué propiedades se te ocurren sobre el producto de matrices y sus traspuestas?

8. Sean tres matrices cuadradas A, B, y C, con

B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ y A . B = C.

(a) ¿Cómo ha de ser la primera fila de A para que la primera fila de B y la primera de C sean iguales?

(b) ¿Cómo ha de ser la segunda fila de A para que la segunda de C sea igual a la segunda de B multiplicada por 4?

(c) Si queremos que la primera fila de B quede multiplicada por 3, la segunda por 4 y la tercera por -2, ¿cómo ha de ser A?

(d) ¿Y si queremos multiplicar a las tres filas por 1?

Ejercicios de matrices

9. Calcula el valor de las incógnitas para que se verifique:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ -1 & b & 0 \\ 0 & 2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Calcula la matriz inversa de : $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

11. Resuelve en forma matricial los sistemas:

(a) $\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=6 \\ y-z=1 \\ z=1 \end{array} \right.$ ***(b)*** $\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ 4x+6y+8z=2 \\ 7x-4y-z=-11 \end{array} \right.$ ***(c)*** $\left\{ \begin{array}{c} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ x+y-z=1 \end{array} \right.$

12. Un empresario del espectáculo planea construir un cine, una sala de fiestas o un pabellón de deportes en la comarca de tres localidades X, Y y Z, según las aficiones de los residentes respectivos. Según un muestreo previo, las preferencias de dichos ciudadanos (en tanto por ciento) se plasman en la matriz siguiente:

	Cine	Baile	Deportes
X	20	40	40
Y	15	35	50
Z	18	42	40

Si el total de habitantes, mayores de 16 años, de las ciudades citadas viene dado por la matriz fila

	X	Y	Z
Habitantes	72.000	14.500	39.200

Investiga qué tipo de espectáculo tendrá mayor número de potenciales clientes.

(a) Valor de lo exportado al país C en los años señalados.

(b) ¿A qué país se exportó más en 1988?

(c) ¿Cuál es el valor total de lo exportado a esos países en los dos años?

13. Resuelve el sistema siguiente calculando previamente la matriz inversa de sus coeficientes

$$\left\{ \begin{array}{c} x+3y+3z=2 \\ x+4y+3z=0 \\ x+3y+4z=-1 \end{array} \right.$$

14. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^{-1} y A^n.

15. Si $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, halla A^3 y A^{50}.

Ejercicios de matrices

16. Justifica por qué no es cierta la igualdad: $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$ cuando *A* y *B* son dos matrices cuadradas cualesquiera.

17. Sea A una matriz de dimensión 3×2. ***(a)*** ¿Existe una matriz B tal que $A\cdot B$ sea una matriz de una sola fila? ***(b)*** ¿Y para $B\cdot A$? Pon un ejemplo para cada caso, siendo la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, ¿lo será también su producto $A\cdot B$? Si la respuesta es afirmativa, justifícala y, si es negativa, pon un contraejemplo.

19. Si A es una matriz tal que $A^2=A$ y $B=2A-I$, demuestra que $B^2=I$.

20. Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?

21. Una matriz de 3 filas y tres columnas tiene rango 3. ***(a)*** ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna? ***(b)*** Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

22. Si $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & x \end{pmatrix}$, estudia si existe algún valor de *x* tal que $B^2=B$.

23. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij}=0 \quad si \quad i\neq j$ (*A es una matriz diagonal*). Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

24. ***(a)*** Considerar una matriz A de orden $m\times n$ con $m\neq n$. Razonar si se puede calcular la expresión $A\cdot A'-A'\cdot A$ siendo A' la matriz traspuesta de A.

(b) Considerar la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, resolver por el método de Gauss:

(b1) el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A'\cdot A$

(b2) el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A\cdot A'$