Ejercicios de sistemas lineales

1. Un grupo de amigos acuden a una tienda y compran "bocatas" y refrescos para merendar. Hacen el siguiente pedido: 3 "bocatas" de jamón, 2 de queso y 5 refrescos, que cuesta 1.800 ptas.

(a) ¿Cuánto cuesta cada artículo?

(b) ¿Cuánto costarían las siguientes compras?:

6 "bocatas" de jamón, 4 de queso y 10 refrescos

9 "bocatas" de jamón, 6 de queso y 15 refrescos

12 "bocatas" de jamón, 8 de queso y 20 refrescos

15 "bocatas" de jamón, 10 de queso y 25 refrescos

(c) ¿Qué compra costaría 18.000 ptas.?

(d) ¿Podemos determinar el coste de la siguiente compra?:

2 "bocatas" de jamón, 5 de queso y 10 refrescos

(e) Si el coste de la compra del apartado (d) es de 2.600 ptas., ¿cuánto costarían las siguientes compras?:

4 "bocatas" de jamón, 10 de queso y 20 refrescos

6 "bocatas" de jamón, 15 de queso y 30 refrescos

8 "bocatas" de jamón, 20 de queso y 40 refrescos

(f) ¿Qué compra costaría 15.600 ptas.?

(g) ¿Cuánto costaría ésta?:

5 "bocatas" de jamón, 7 de queso y 15 refrescos

(h) ¿Cuánto costarían las siguientes compras?:

9 "bocatas" de jamón, 17 de queso y 35 refrescos

8 "bocatas" de jamón, 9 de queso y 20 refrescos

13 "bocatas" de jamón, 16 de queso y 35 refrescos

2. Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x+2y=4 \\ x-y=1 \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x+2y=4 \\ 2x+4y=13 \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x+2y=4 \\ 2x+4y=8 \end{array} \right.$$

(a) Clasifica los sistemas en función de las soluciones obtenidas.

(b) Representa los sistemas anteriores en un sistema de coordenadas.

3. Representa las rectas

$$\begin{array}{ll} r: & y=-2x+6 \\ s: & y-x+6=0 \end{array}$$

y determina su punto común.

(a) Encuentra una tercera ecuación de una recta t de forma que el sistema formado por las tres tenga solución única.

(b) La misma cuestión para que ahora el sistema no tenga solución.

(c) ¿Puede buscarse la 3ª ecuación de forma que el sistema tenga infinitas soluciones? Escribe un sistema de tres rectas con infinitas soluciones

(d) ¿Podrías encontrar alguna relación entre los coeficientes de las ecuaciones, en cada uno de los tres casos anteriores?

4. El comisario Flórez recibió un chivatazo totalmente fiable: en la ciudad se venden 2 papelinas y una china por 45 dólares, pero desconoce el precio de cada una. Transmite esta información a los agentes Antonio, Benito y Carolina y los envía a tres puntos de la ciudad para que averigüen estos precios. Cada uno de ellos consigue nueva información y, celoso de su éxito, no se la comunica a sus colegas.

Antonio averigua que 6 papelinas y 3 chinas se vendieron por 112 dólares, Benito que 4 papelinas y 2 chinas costaron 90 dólares y Carolina que por 3 papelinas y 2 chinas se cobra 72 dólares.

Solamente uno de los investigadores consiguió saber los precios reales. ¿Cuál de ellos? ¿Qué sucede con los otros dos?

5. Se quiere llenar una piscina de 40 m^3 de capacidad con cuatro grifos. ¿Qué cantidad de agua deberá aportar cada uno?

Añade la condición de que el primer grifo aporte 10 m^3 más que los otros tres juntos.

Inventa dos condiciones más para obtener una única solución.

6. Escribe un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas cuya solución única sea (-5, 2).

Escribe un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas cuya solución única sea (2,0,3).

Escribe un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas con infinitas soluciones: $(2+z, -2+2z, z)$.

7. Forma un sistema equivalente a $\left\{ \begin{array}{l} x-2y=3 \\ 2x-y=9 \end{array} \right.$

¿Cómo lo has hecho?

Comprueba que las soluciones son las mismas y explica por qué no han variado.

8. (a) Resuelve l sistema $\left. \begin{array}{r} x-3y+7z=10 \\ 5x-y+z=8 \\ x+4y-10z=-11 \end{array} \right\}$.

(b) Si aplicamos el método de Gauss al sistema del apartado (a) con las ecuaciones en otro orden ¿nos llevaría también a un sistema con dos ecuaciones? En caso afirmativo ¿las soluciones serían las mismas?. Realiza los cálculos partiendo de la siguiente ordenación:

$$\left. \begin{array}{r} x+4y-10z=-11 \\ 5x-y+z=8 \\ x-3y+7z=10 \end{array} \right\}$$

9. Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{c} 2x+5y=16 \\ x+3y-2z=-2 \\ x+z=4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} -x+2y-3z=-2 \\ -x+8y-27z=0 \\ x-y-z=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} 2x+y=1 \\ 3x+2y=4 \\ x+y=3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} x+y+w=6 \\ x+z-w=-1 \\ y+z+w=6 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} 2x-y+3z=3 \\ x+z=1 \\ 4x-y+5z=5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} 2x-5y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$$

10. Dado el sistema $\left.\begin{array}{c} x+y-z=5 \\ x-y-z=7 \end{array}\right\}$, añadir una nueva ecuación de modo que el nuevo sistema sea:

(a) (siga siendo) compatible e indeterminado

(b) incompatible

(c) compatible y determinado.

11. Un grupo de chicas y chicos del instituto ganó un premio, concedido por la agencia de viajes "Europa", en un concurso televisivo. Consiste aquél en un viaje por distintas ciudades de Francia, Italia y Suiza, debiendo alojarse y comer en hoteles y restaurantes previamente concertados, cuyos precios, por persona y día, se exponen en la tabla siguiente:

	Francia	**Italia**	**Suiza**
hotel (con desayuno)	8.000 ptas.	6.000 ptas.	7.000 ptas.
restaurante (comida y cena)	5.000 ptas.	4.000 ptas.	4.000 ptas.

Las cantidades totales asignadas por persona son de 70.000 ptas. en hoteles y 44.000 ptas. en restaurantes. Se impone además la condición de que cada día completo debe permanecerse en la ciudad que se haya elegido. ¿Cómo os organizaríais el viaje?

12. Hierón, rey de Siracusa, dio a un orfebre 7.465 g de oro para que éste hiciese una corona que iría dedicada al dios Júpiter.
Una vez se la hubo entregado, sospechó Hierón que parte del oro había sido sustituido por plata y mandó llamar al sabio Arquímedes para que lo averiguase sin dañar la corona.
Arquímedes sumergió la corona en agua y, llevándola a una balanza, vio que perdía 467 g de su peso. Sabía que el oro sumergido en agua perdía 52 milésimas por cada gramo, y 92 la plata.

¿Eran fundadas las sospechas del rey?

13. Una cooperativa recoge papel usado para reciclar, que clasifica en tres tipos: alto, medio y bajo.
Ha realizado tres pruebas con diferentes mezclas: en la primera se han obtenido 4 Kg, habiéndose utilizado 2, 3 y 1 Kg de cada tipo, respectivamente; en la segunda, con 1, 2 y 3 Kg se produce un total de 5 Kg; y en la tercera 3 Kg con 3, 1 y 2 Kg. ¿Cuál es el rendimiento de cada tipo de papel?

14. Resolver los siguientes sistemas por el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{c} x-2y+z=0 \\ -2x+5y-z=5 \\ x+y-2z=-3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} 3x+2y+5z=9 \\ 4x+3y-z=-18 \\ -2x+4y-3z=6 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} 3x-y+z=3 \\ -y+z=1 \\ x-2y-z=2 \end{array}\right\}$$

Ejercicios de sistemas lineales

$$\left.\begin{array}{c}3x-7y+2z=0\\-2x+2y-z=3\\x-5y+z=3\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{c}-x+2y=1\\4x-3y-5z=2\\5x-5y-5z=1\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{c}x-2y+3z=-3\\2x+y=2\\-x-8y+9z=-13\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}3x-7y+2z=0\\-2x+2y-z=3\\x-5y+z=0\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{c}-x+2y=1\\4x-3y-5z=2\\x-y-z=5\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{c}x-2y+3z=-3\\2x+y=2\\-x-8y+9z=3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}x-y+2z+3t=1\\2x+3y-z+t=-2\\3x+2y+z+4t=-1\\-2x+2y-4z-6t=-2\\5y-5z-5t=-4\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{c}x+y-z+2t=1\\2x+z+t=0\\y-z+3t=1\\-x+2y-3z=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}x+y-z=0\\2x+3y-2z=0\\-x+y+4z=0\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{c}2x+3y-z=0\\x+y+2z=0\\-x+2y+2z=0\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{c}2x+3y-z=0\\x+y+2z=0\\-x-7z=0\end{array}\right\}$$

15. Dependiendo de los valores del parámetro *a*, discute y resuelve los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{c}x-2y+z=1\\2x+y-3z=2\\ax-y-2z=3\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{c}x+y-z=1\\2x-3y+2z=22\\x-4y+az=7a\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{c}x+y-z=1\\3x+3y+az=22\\x-4y+3z=0\end{array}\right\}$$

16. La edad de un padre es doble que la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (*exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos*) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de las edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tiene actualmente el padre?

17. Halla tres números sabiendo que el primero es igual a dos veces el segundo más la mitad del tercero, que la suma del segundo y el tercero es igual al primero más 1, y que si se resta el segundo de la suma del primero con el tercero, el resultado es 5.

18. De un número de tres cifras se sabe que la suma de éstas es 13. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en 198, y si se intercambian las de las unidades y decenas, el número aumenta en 36. Encontrar el número.

19. En un viaje por Francia, Italia y España un turista gastó por hospedaje 2.000, 2.500 y 3.000 ptas. diarias, respectivamente. En comida sus gastos respectivos fueron de 2.500, 1.750 y 3.000 ptas. al día. Además, en concepto de varios gastó 1.000 ptas. diarias en cada país. Si sus gastos parciales fueron de 38.000 ptas. en hospedaje, 37.500 en comida y 15.000 en varios, ¿cuántos días pasó en cada país?

20. El director de un hotel de verano espera a 3 turistas que son diabéticos. Estos turistas precisan de tres tipos de insulina: lenta, semilenta y ultralenta. Las necesidades diarias de cada turista son:

Turista 1: 30 unidades de lenta, 20 u. de semilenta y 10 u. de ultralenta.

Turista 2: 10 u. de lenta, 30 u. de semilenta y 30 u. de ultralenta.

Turista 3: 10 u. de lenta, 10 u. de semilenta y 50 u. de ultralenta.

El director ha comprado las siguientes cantidades de insulina: 700 u. de lenta, 1.050 de semilenta y 2.100 u. de ultralenta.
¿Cuántos días podrán permanecer cada uno de los turistas en el hotel antes de que se agoten las existencias de insulina de las que dispone él mismo? Resolver por el método de Gauss.

21. Para un *"calamitoso"* partido de fútbol, del Real Madrid, se ponen a la venta tres tipos de localidades: Fondo, General y Tribuna. Se sabe que la relación entre los precios de las localidades de Tribuna y General es 19/18 y entre General y Fondo es 6/5. Si al comprar tres localidades, una de cada clase, se pagan en total 13.000 pesetas, ¿cuál es el precio de cada tipo de localidad?

22. Un potente inversionista y honrado contribuyente, decide comprar acciones de tres tipos por un importe total de 3.500 millones de euros. Pasado un año, las aciones del primer tipo reparten un dividendo del 6 %, las del segundo tipo del 8 % y las del tercer tipo del 10 %. La cuantía total de la rentabilidad de las acciones es de 300 millones de euros.

(a) ¿Cuánto invirtió en cada uno de los tipos de acciones, sabiendo que el total invertido en las acciones del tercer tipo es igual a la suma de los otros dos más 1.000 millones?

(b) Si prescindimos de este último dato, ¿cuál sería la respuesta?

23. Una empresa concede 2.700.000 ptas. para ayudas a 100 estudiantes, hijos de sus empleados. Establece tres cuantías diferentes en función de sus niveles educativos, A, B y C: 40.000 ptas. para los de nivel A, 16.000 para los de nivel B y 20.000 para los de nivel C. Si para el nivel A destina cinco veces más dinero que para el B, ¿cuántos estudiantes hay en cada nivel?

24. Una fábrica, cuya producción tiene gran demanda, abastece a tres mayoristas, A, B y C, quienes han hecho los siguientes pedidos durante un cierto mes: A desea tanto como B y C juntos, y la orden de B es de un 10 % más que la de C. La producción total de la fábrica es de 126 unidades. ¿Cómo debe el fabricante distribuir la producción del mes entre los mayoristas?

25. ***(a)*** Indica tres transformaciones que pueden hacerse en un sistema sin que éste altere su solución.

(b) Pon un ejemplo de sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible y determinado.

(c) Ídem. compatible e indeterminado.

(d) Ídem. incompatible.

(e) ¿Puede un sistema homogéneo ser incompatible?

(f) Si al sistema $\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ y+z=2 \end{array}\right\}$ le añadimos la ecuación $x+z=3$, ¿qué tipo de sistema obtenemos? Razona la respuesta.

26. Un aficionado a la Bolsa invirtió 2.000.000 de euros en acciones de tres empresas A, B y C. Al cabo de un año la empresa A pagó el 6 % del dinero invertido, la B el 8 % y la C el 10 %. Como consecuencia de ello, el aficionado a la bolsa cobró un total de 162.400 euros. Además en la empresa C invirtió el doble que en la A. Se pide:

(a) Calcular cuánto invirtió en cada empresa. Razona la respuesta. (*7 puntos*)

(b) Prescindiendo del último dato, es decir de que el aficionado invirtió en la empresa C el doble que en la A, ¿cuál sería la respuesta? (*3 puntos*)

27. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

(a) Calcula el rango de A. (*3 puntos*)

(b) Discutir si existe solución y resolver, caso de que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ (*3 puntos*)

(c) Cambiando una sola ecuación, convertir el sistema de ecuaciones lineales del apartado ***(b)*** en un sistema que tenga infinitas soluciones y calcúlalas. (*4 puntos*)

28. Escribir un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que sea incompatible y comprobar la incompatibilidad. Interpretar geométricamente este sistema. (*5 puntos*)

29. Tres personas A, B y C le van a hacer un regalo a un amigo común. El regalo les cuesta 8.600 euros. Como no todos disponen del mismo dinero deciden pagar de la siguiente manera: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada 2 euros que paga B, C paga 3 euros. Se pide:

(a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita determinar cuánto paga cada persona. (*5 puntos*)

(a) Resolver el sistema por el método de Gauss. (*5 puntos*)

30. Considerar la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&3&4\\3&4&m\end{pmatrix}$ siendo *m* un parámetro real. Se pide:

(a) Calcular el rango de A según los valores del parámetro *m*. (*3 puntos*)

(b) Considerar el sistema de ecuaciones lineales $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Discutir si existe solución según los valores del parámetro *m*. En caso afirmativo, resolver el sistema. (*4 puntos*)

(c) Para *m* = 7, considerar el sistema de ecuaciones lineales $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$. Discutir si existe solución. (*3 puntos*)

31. Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{c}3x+4y-5z=6\\x-y+z=0\\x-y=2\end{array}\right.$ Se pide:

(a) Discutir si existe solución y, en caso afirmativo, resolverlo. (*5 puntos*)

(b) Modificando una sola de las tres ecuaciones transformar el sistema dado en un sistema compatible e indeterminado y resolverlo. Razonar la respuesta. (*5 puntos*

Ejercicios de sistemas lineales

32. ¿Para qué valores de *a* y *b* será compatible este sistema? $\begin{cases} x+y+z=a \\ x-y-z=b \end{cases}$ ¿Será determinado?

33. Si tenemos un sistema compatible indeterminado de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿se puede conseguir un sistema incompatible añadiendo una tercera ecuación?

34. ***(a)*** Forma un sistema de dos ecuaciones que tenga como solución $x=2, \quad y=-1, \quad z=3$. Encuentra todas sus soluciones.

(b) Forma un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuyos términos independientes sean todos cero, de forma que tenga como solución $(2,-1,3)$. Resuélvelo.

35. Si a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas incompatible le agregamos una tercera ecuación, ¿podríamos lograr que fuera compatible indeterminado? ¿Y determinado? Justifica las respuestas.

36. ¿Es posible convertir este sistema en compatible indeterminado cambiando un signo?

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

37. ¿Existe algún valor de *k* para el cual tenga infinitas soluciones el siguiente sistema?

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ kx+z=0 \end{cases}$$

38. ¿Para qué valores de *a* el siguiente sistema es incompatible? ¿Puede tener infinitas soluciones?

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+2y+az=5 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$$

39. ¿Es posible transformar el siguiente sistema en indeterminado cambiando sólo la tercera ecuación? $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=3 \\ x-y-z=5 \end{cases}$ Razona la respuesta y pon un ejemplo.

40. Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y en cada caso pon un ejemplo o un contraejemplo:

I) En un sistema compatible indeterminado se puede eliminar una ecuación y obtener un sistema equivalente.

II) Un sistema compatible indeterminado tiene siempre dos ecuaciones iguales.

III) De un sistema incompatible podemos extraer otro que sea compatible eliminando ecuaciones

41. Considera el sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$ ***(a)*** Añádele una ecuación de modo que sea incompatible e interpreta geométricamente esta situación. ***(b)*** ¿Se puede añadir una ecuación de modo que el sistema sea compatible indeterminado?

42. Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, puede ser compatible determinado? Pon ejemplos aclaratorios.

43. Se considera un número de tres cifras del que se sabe que la suma de sus tres cifras es 12, el doble de la cifra de las decenas es igual a la suma de las otras dos cifras y, por último, se sabe que la cifra de las centenas es tres más la mitad de la cifra de las decenas. Se pide:

(a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales con el que se determine dicho número. (***3 puntos***).

(b) Resolve, utilizando el método de Gauss, el sistema de ecuaciones lineales planteado en el apartado (a). (***4 puntos***)

(c) ¿Cuál es la solución del problema si no se considera la última condición? Razona la respuesta. (***3 puntos***)