

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato C.S.

Materia: Límites, continuidad y derivadas.

Fecha: 26 - Enero - 11

Alumno.....

1. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) \cdot e^x, & x < 0 \\ \frac{3x-1}{x-1}, & 0 < x < 2 \\ x^2 + 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

- (a) Determina su dominio.
- (b) Calcula y clasifica los puntos de discontinuidad.
- (c) Estudia su derivabilidad.

(10 puntos)

2. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 - x + 5} - \sqrt{x^2 + 3} \right]$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x+3}{2x-2} \right]^{3x^2}$

(4 puntos)

3. Calcula, efectuando operaciones, la función derivada de las siguientes funciones:

(a) $y = \frac{-5}{\sqrt[3]{x^2+5}}$

(b) $y = \ln \left[\frac{(3x+5)^4}{1-x} \right]$

(c) $y = e^{3x} \cdot (3x + 2)$

(6 puntos)

4. (a) Aplicando la definición de derivada, determina la derivada de $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

(b) Determina la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{2}{x^2}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

(5 puntos)

Soluciones

1. (a) Dominio de $f = R - \{0, 1\}$

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato C.S.

(b) Tenemos que estudiar la función en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. En el resto de los puntos del dominio la función es continua.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1)e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-1}{x-1} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0 \text{ es un punto de discontinuidad evitable.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-1}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x-1}{x-1} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 \text{ es un punto de discontinuidad inevitable de 1ª especie.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(2) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 1) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-1}{x-1} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 2.$$

(c) f no es derivable en $x = 0$ y en $x = 1$ por no ser continua.

$$f'(x) = \begin{cases} (x+2) \cdot e^x, & x < 0 \\ \frac{-2}{(x-1)^2}, & 0 < x < 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}, \quad \left\{ \begin{array}{l} f'_-(2) = -2 \\ f'_+(2) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x = 2.$$

f es derivable en $R - \{0, 1, 2\}$

2. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 5} - \sqrt{x^2 + 3}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 5} - \sqrt{x^2 + 3}) =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + x + 5 - x^2 - 3}{\sqrt{x^2 + x + 5} + \sqrt{x^2 + 3}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x+2}{\sqrt{x^2 + x + 5} + \sqrt{x^2 + 3}} \right] = \frac{1}{2}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x+3}{2x-2} \right]^{3x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{15x^2}{2x-2} \right)} = e^{+\infty} = +\infty$

3.

(a) $y' = \frac{-10x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2+5)^4}}$

(b) $y' = \frac{12}{3x-5} + \frac{1}{1-x}$

(c) $y' = e^{3x} \cdot (9x + 9)$

4.

(a) $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\sqrt{x+2}}{x} - 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-x^2}{x(x-2)(\sqrt{x+2}+x)} =$

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato C.S.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(-x-1)}{x(x-2)(\sqrt{x+2}+x)} = \frac{-3}{8}$$

(b) $f'(x) = \frac{-4}{x^3} \Rightarrow m_{tg} = f'(-1) = 4$, $P(-1, f(-1) = 2) \Rightarrow$ la recta tangente a $f(x)$ en P tiene por ecuación: $y - 2 = 4 \cdot (x + 1)$