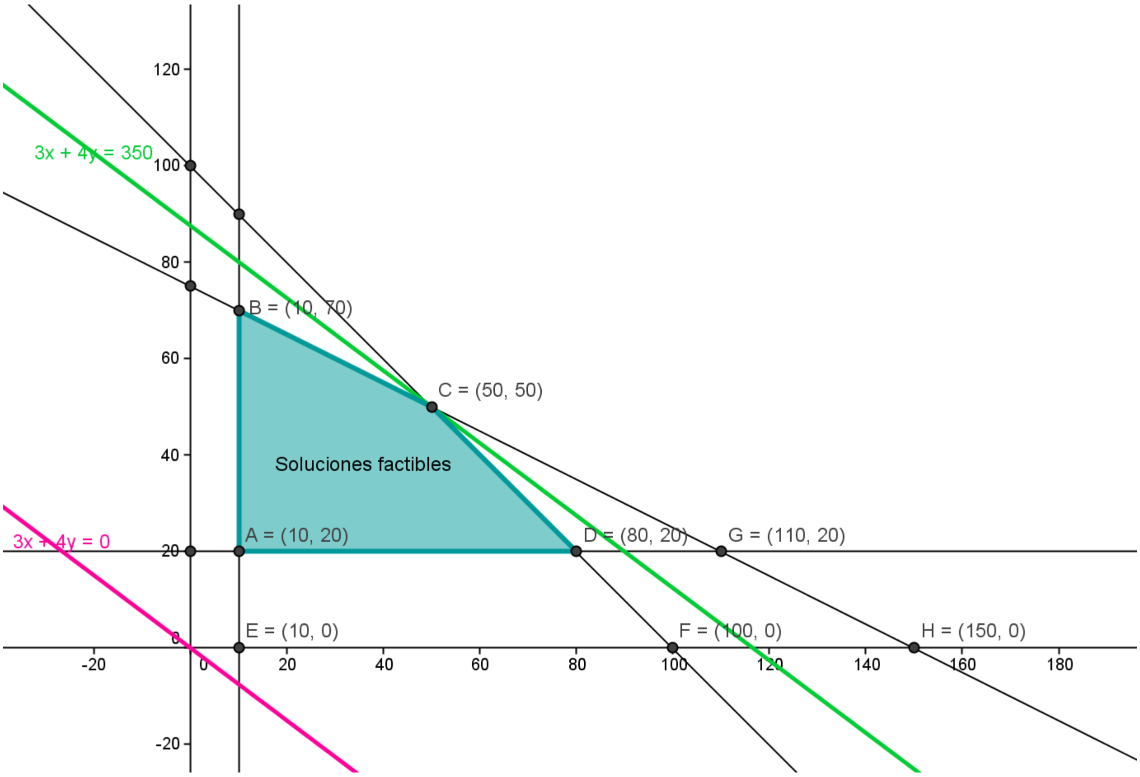
Soluciones opción A (Junio 2011)

1. **(a)**

	nº lotes	nº frascos	nº barras	Beneficio
Oferta A	**x**	**x**	**x**	**30x**
Oferta B	**y**	**y**	**2y**	**40y**

Buscamos los pares (x, y) que verifiquen las restricciones: y que maximicen la función beneficio $B(x,y)=30x+40y$.



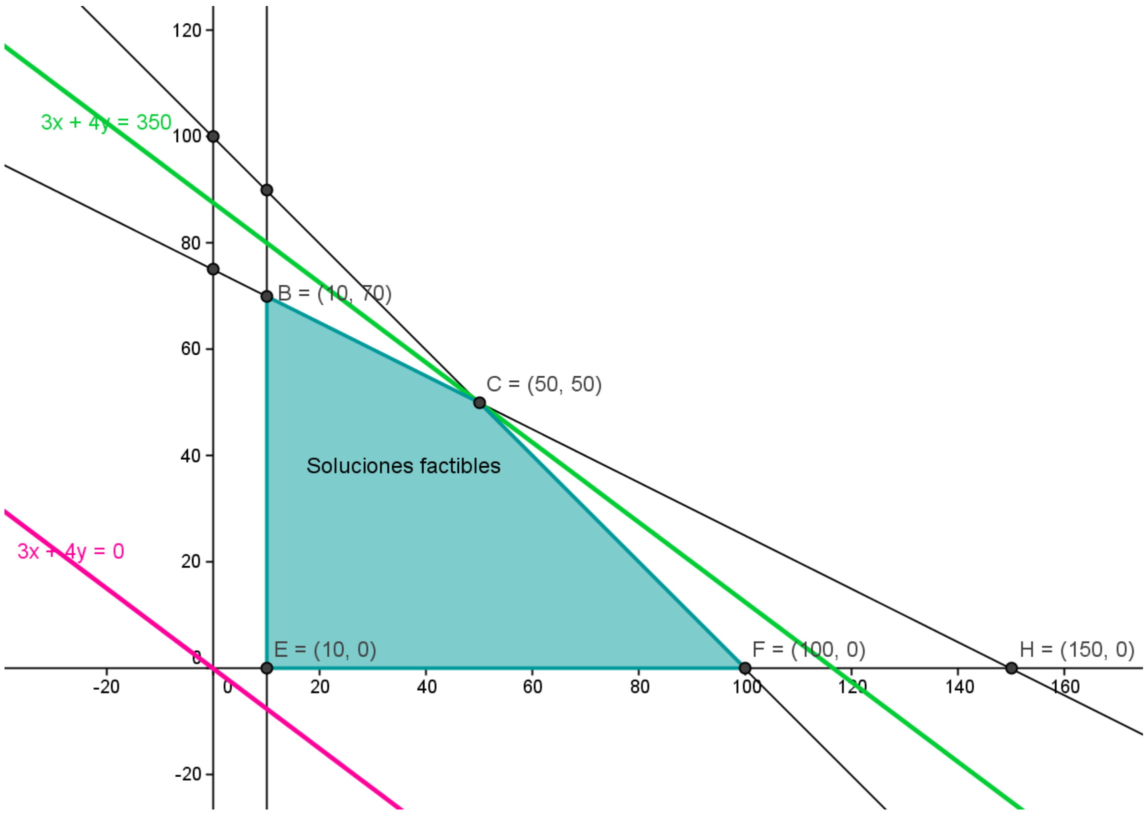
Una vez representada la función beneficio nulo (30x + 40y =0), trazamos sus paralelas que corten al conjunto de soluciones factibles. Observamos que la que pasa por el punto C(50,50) es la que tiene un término independiente mayor (30x + 40y =3500). Comprobamos este resultado obteniendo el valor del beneficio en los vértices del conjunto de soluciones factibles:

$$\left\{\begin{array}{l} B(10,20)=1100 \\ B(10,70)=3100 \\ B(50,50)=3500 \\ B(80,20)=3200 \end{array}\right. \Rightarrow \text{La solución óptima es vender 50 lotes de cada tipo.}$$

(b) Si eliminamos la restricción $y \geq 20$, cambia el conjunto de soluciones factibles, como puede verse en el gráfico, pero no la solución óptima.

Comprobamos este resultado obteniendo el valor del beneficio en los vértices del conjunto de soluciones factibles:

$$\left\{\begin{array}{l} B(10,0)=300 \\ B(10,70)=3100 \\ B(50,50)=3500 \\ B(100,0)=3000 \end{array}\right. \Rightarrow \text{La solución óptima es vender 50 lotes de cada tipo.}$$



2. **(a)**

$$f'(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot x^{\frac{-3}{2}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{(-1)}{2\sqrt{x^3}}=\frac{-1}{2x\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$g(x)=\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}\Rightarrow g'(x)=(-1)\cdot\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{-2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{(-1)}{x^2}\Rightarrow$$

$$g'(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\cdot\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

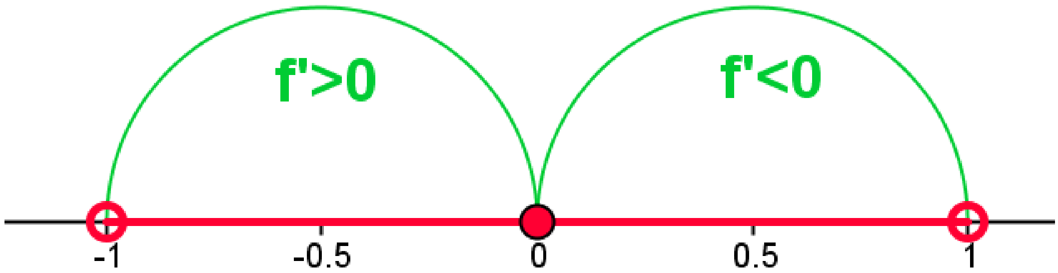
(b) $\int_1^3\left(x^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{x}\right)\cdot dx=\left[\left(2\cdot x^{\frac{1}{2}}-\ln x\right)\right]_1^3=\left(2\sqrt{3}-\ln 3\right)-2$

3. El dominio de la función serán los números reales que verifiquen la condición: $1-x^2>0\Rightarrow(1-x)\cdot(1+x)>0\Rightarrow x\in(-1,1)\Rightarrow Domf=(-1,1)$. En efecto:

x<-1	**-1<x<1**	**x>1**
$1-x^2<0$	**$1-x^2>0$**	**$1-x^2<0$**

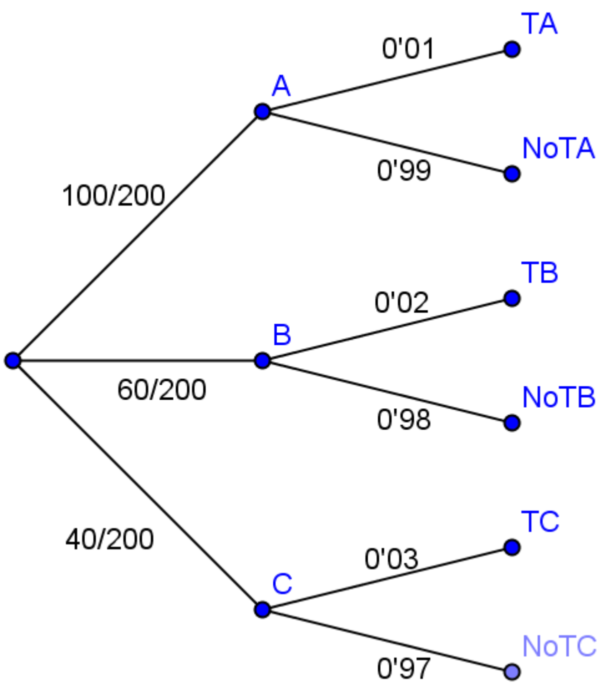
$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Estudiamos el signo de f'(x) en su dominio:



La función es creciente en (-1, 0) y decreciente en (0, 1), por lo tanto el punto de abscisa x= 0 es un máximo relativo.

4.



(a) $P(Tara) = 0'5 \cdot 0'01 + 0'3 \cdot 0'02 + 0'2 \cdot 0'03 = 0'017$

(b) $P(B) = \frac{60}{200} = 0'3$

(c) $P(B \mid T) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = \frac{0'3 \cdot 0'02}{0'017} = \frac{0'006}{0'017} = \frac{6}{17}$

Soluciones opción B (Junio 2011)

---

1. **(a)**

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F1 \leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{-2F3 + F2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\substack{F1 + F3 \\ F2 + F3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\substack{1/2F2 \\ -F3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow (B - I_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) $BX - 4A = X \Rightarrow BX - X = 4A \Rightarrow (B - I_3)X = 4A \Rightarrow X = (B - I_3)^{-1} \cdot 4A$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

2. **(a)**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\substack{-2F2 + F1 \\ -2F3 + F1}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{3F3 + F2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rangoA = 3$

(b) $AX=O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 3y+7z=0 \\ 16z=0 \end{cases}$

Al ser un sistema homogéneo, y el rango de la matriz de los coeficientes 3, significa que es compatible y determinado con una única solución que es : x = y = z = 0.

3. (a)

$$f(x)=\ln\frac{x^2}{\sqrt{x+3}}=2\ln x-\frac{1}{2}\ln(x+3) \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{2\cdot(x+3)}$$

$$g(x)=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=x^{\frac{-3}{4}} \Rightarrow g'(x)=\frac{-3}{4}\cdot x^{\frac{-7}{4}}=\frac{-3}{4\cdot\sqrt[4]{x^7}}$$

(b)

$$\int_0^1 (x-e^{-2x})dx=\int_0^1 x\cdot dx+\frac{1}{2}\int_0^1(-2)\cdot e^{-2x}dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}+\frac{e^{-2x}}{2}\right)\right]_0^1=$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-2}}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2e^2}$$

4.

$$\left.\begin{cases} C(p)=\sqrt{\frac{p^2}{2}+17} \\ p(t)=3'1+0'1t^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow C(t)=\sqrt{\frac{(3'1+0'1t^2)^2}{2}+17}$$

$$C'(t)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{(3'1+0'1t^2)^2}{2}+17}}\cdot(3'1+0'1t^2)\cdot 0'2t$$

$$C'(3)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{4^2}{2}+17}}\cdot 4\cdot 0'6=\frac{1}{10}\cdot 2'4=0'24\ ppm/año$$

5. $X=\text{"}edad\text{"}=N(\mu=24,\sigma=4)$. Muestra elegida de tamaño n = 100

(a) Como X es normal y n = 100 >30

$\Rightarrow \bar{X}=\text{"}edad\ media\ en\ cada\ muestra\text{"}=N\left(\mu_{\bar{x}}=24, \sigma_{\bar{x}}=\frac{4}{\sqrt{100}}=0'4\right)$

Por lo tanto la varianza es $(0'4)^2=0'16$.

(b) $1-\alpha=0'90 \Rightarrow P(Z\le Z_{\frac{\alpha}{2}})=0'95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}=1'645$

La media de la muestra elegida se encontrará con una confianza del 90 % en el intervalo:

$$\left(\mu-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\bar{x}},\mu+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\bar{x}}\right)=(24-1'645\cdot 0'4, 24+1'645\cdot 0'4)=(23'342, 24'658)$$