Soluciones Septiembre 2012

Opción A

1. (a) $A^2 \cdot X = I_2 \Leftrightarrow (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot I_2 \Leftrightarrow X = (A^2)^{-1}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 9 & -12 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow (A^2)^{-1} = X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Para que exista una única matriz X verificando la condición enunciada la matriz B ha de poseer inversa, es decir, $rango B = 2$. Comprobémoslo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango B = 1$$

Por lo tanto no existe una única matriz X verificando la igualdad.

2. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & 11 & 4 & 10 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Como rango A = 2 $\neq$ 3 = Rango A^* $\Leftrightarrow$ El sistema es incompatible (sin solución)

3. (a) $f'(x) = 2\ln(1+x) \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{2\ln(1+x)}{(1+x)}$

$$g'(x) = 3 \cdot \left[\frac{x}{(x^3-x+1)^2} \right]^2 \cdot \frac{(x^3-x+1)^2 - 2x(x^3-x+1)\cdot(3x^2-1)}{(x^3-x+1)^4}$$

(b) $\int_1^2 (\frac{1}{x} - x^{-2})dx = [\ln|x| + \frac{1}{x}]_1^2 = \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right) - (\ln 1 + 1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$

4. $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-1) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10x + 8 \Rightarrow f''(x) = 6x - 10$

Soluciones Septiembre 2012

$$Domf = Domf' = Domf'' = R$$

Intervalos de monotonía:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = \frac{4}{3}$

Estudiando el signo de f’ obtenemos: f’ positiva en , f’ negativa en . Esto significa que la función f(x) es creciente en $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) y (2, \infty)$ y es decreciente en $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$. y como consecuencia el punto de abscisa $x = \frac{4}{3}$ es máximo relativo y x = 2 mínimo relativo.

Intervalos de concavidad:

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

Estudiando el signo de f’’ obtenemos: f’’ positiva en $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$, f’’ negativa en $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$. Esto significa que la función f(x) es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ y es cóncava hacia arriba en $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$. y como consecuencia el punto de abscisa $x = \frac{5}{3}$ es de inflexión.

5. (a) P(ninguno de los cuatro es de licor) = P(A) = $\frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{14}{33}$

(b) P(coger exactamente uno de licor) = $4 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{33}$

(c) P(coger al menos uno de licor) = $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$

Opción B

1. (a)

	número	Minutos corte	Minutos confección	Beneficio en €
pantalones	x	6x	4x	10x
chaquetas	y	4y	6y	6y

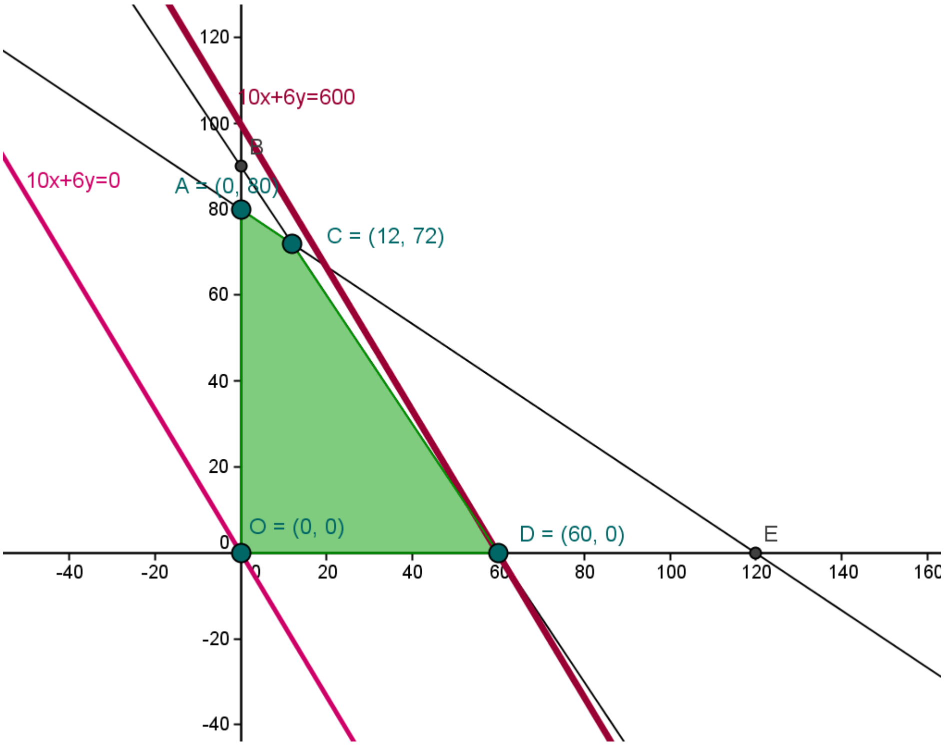
Buscamos los pares (x, y) que verificando las restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} 6x + 4y \le 360 \\ 4x + 6y \le 480 \\ x, y \in Naturales \end{array} \right\}$$

maximicen la función beneficio: $B(x, y) = 10x + 6y$

Determinamos primero el conjunto de soluciones factibles:

Soluciones Septiembre 2012

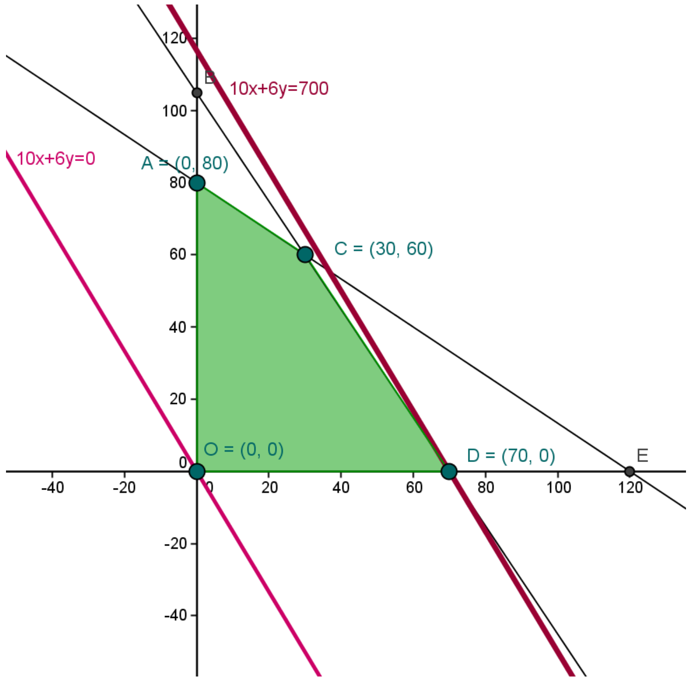


Podemos comprobar que se han de fabricar x = 60 pantalones y y = 0 faldas para conseguir un beneficio máximo de 600 €.

(b) Cambian las restricciones que serían en este caso:

$$\left\{ \begin{array}{c} 6x + 4y \leq 420 \\ 4x + 6y \leq 480 \\ x, y \in Naturales \end{array} \right\}$$ El conjunto de soluciones factibles es:

Soluciones Septiembre 2012



Podemos comprobar que se han de fabricar x = 70 pantalones y y = 0 faldas para conseguir un beneficio máximo de 700 €.

2. (a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 \cdot e^{-x}}} \cdot [3x^2 \cdot e^{-x} - x^3 \cdot e^{-x}]$

$$g'(x) = 5 \cdot \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^4 \cdot \left(1 + \frac{2}{x^3}\right)$$

(b) $\int_2^4 (\sqrt{x} + x^2)dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \left(\frac{16}{3} + \frac{64}{3}\right) - \left(\frac{2\sqrt{8}}{3} + \frac{8}{3}\right) = 24 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$

3. $Domf = (0, \infty)$

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \;;\; f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -3 + 2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} \approx 4'48$$

Intervalo	$0 < x < e^{\frac{3}{2}}$	$x > e^{\frac{3}{2}}$
Signo de f''	**negativa**	**positiva**

La función es cóncava hacia abajo en $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$,por tanto presenta un punto de inflexión en $\left(x = e^{\frac{3}{2}}, y = \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$.

Soluciones Septiembre 2012

4. (1º) X = "tiempo de conexión" = $N(\mu, \sigma = 15 \min) \Rightarrow \overline{X} = N\left(\mu_{\overline{X}} = \mu, \sigma_{\overline{X}} = \frac{15}{\sqrt{n}}\right)$

(2º) Si $1 - \alpha = 0'95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

(3º) Intervalo de confianza 0'95 = $(30, 46) = \left(\overline{x_i} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}}, \overline{x_i} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}}\right)$. Por lo tanto, el punto medio del intervalo es la media de la muestra:

$$\overline{x_i} = \frac{30+46}{2} = 38 \min utos$$

(4º) Error = 38 -30 = 8 = $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left[\frac{1'96 \cdot 15}{8}\right]^2 = 13'5.. \approx 14$

El tamaño de la muestra ha de ser de 14 individu os.