Matrices

1.- Definiciones

1.1 Definición:

Una **matriz** es una ordenación rectangular de números. Los números *(o símbolos que los representan)* se llaman **elementos** de la matriz. Se suele escribir el conjunto de números entre paréntesis o corchetes.

➲ ***EJEMPLOS:***

$$A=\begin{pmatrix}3&5&7\\0&2&1\\2&6&8\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&2\\5&-1\\4&9\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}4\\5\\8\end{pmatrix}$$

1.2 Notación:

1. Se suelen emplear letras mayúsculas para simbolizar matrices, y las letras minúsculas correspondientes para designar sus elementos.
2. Un elemento general de una matriz A puede ser escrito a_{ij}, esto designa al elemento que se encuentra en la intersección de la *i-ésima fila* y de la *j-ésima columna*. Se puede entonces representar la matriz así

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&..&..&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&..&..&a_{2n}\\..&..&..&..&..\\a_{m1}&a_{m2}&..&..&a_{mn}\end{pmatrix}$$

es decir, $A=(a_{ij})$, *i = 1,2,..,m*; *j = 1,2,..,n* donde *m* es el número de filas y *n* el número de columnas.

1.3 Definición:

Se dice que una matriz es de **orden** *m x n* si tiene *m* filas (es decir líneas horizontales) y *n* columnas (es decir líneas verticales).

- Si *m = n* se dice que la matriz es **cuadrada.** Una matriz cuadrada $A_{n\times n}$ suele decirse que es de **orden n**. Los elementos a_{ii} de A forman su **diagonal principal**, mientras que los a_{ij} tales que *i + j = n + 1* constituyen la **diagonal secundaria**.

- Si $m \neq n$, la matriz se dirá **rectangular.**

- Las matrices *1 x n* se llaman **vectores-fila.**

- Las matrices *m x 1* se llaman **vectores-columna.**

➲ ***EJEMPLOS:***

1. En un Instituto rural, están matriculados alumnos de tres pueblos diferentes. En primer curso hay 100 alumnos del pueblo A, 80 del B y 30 del C. En segundo curso hay 65 del A, 50 del B y 20 del C. En tercer curso hay 50 del A, 35 del B y 12 del C. En COU hay 40 del A, 25 del B y 8 del C. Disponer estos datos en una matriz.

SOLUCIÓN:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 80 & 30 \\ 65 & 50 & 20 \\ 50 & 35 & 12 \\ 40 & 25 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Supongamos que una compañía tiene dos fábricas (A,B) y tres almacenes (R,S,T). Si la mercancía manufacturada en las fábricas ha de transportarse cada día a los almacenes, entonces un problema de investigación operativa es el de determinar la mejor forma de guardar la mercancía en los almacenes para que el coste total de transporte sea lo menor posible.

Para resolver el problema es necesario saber lo más exactamente posible los costes del transporte de la mercancía por los seis caminos diferentes. Cuando se han estimado estos costes, se pueden disponer en forma matricial así:

Almacenes

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} R & S & T \end{array} \\ \text{Fábricas} \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriz de coste

El elemento $c_{11} = 4$ es el coste de transportar una unidad de mercancías de la fábrica A al almacén R; el elemento $c_{12} = 7$es el coste de enviar una unidad de A a S, etc.

1.4 Matrices equidimensionales.

Se dice que dos matrices son **equidimensionales** si tienen el mismo orden.

➲ ***EJEMPLO:***

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ son equidimensionales pues su orden es 3x3.

2.- Igualdad de matrices. Tipos de matrices

2.1 Definición:

Dos matrices A = $(a_{ij})_{m \times n}$ y B = $(b_{ij})_{p \times q}$ son **iguales** si:

i) son del mismo orden, es decir, *m = p* y *n = q*, y

ii) los elementos correspondientes son iguales, $a_{ij} = b_{ij}$,$\forall$i,j.

2.2 Matriz traspuesta de una dada.

Se llama **matriz traspuesta** de $A_{m \times n}$,a la matriz denotada $A'_{n \times m}$,que resulta de intercambiar ordenadamente las filas por columnas.

➲ ***EJEMPLO:***

La matriz traspuesta de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad es \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.3 Matriz nula.

Una matriz, cualquiera que sea su dimensión, es **nula**, si *todos* los elementos que figuran en ella son 0.

<u>*Los tipos de matrices siguientes se refieren a matrices **cuadradas:***</u>

2.4 Matriz simétrica.

Una matriz cuadrada A se dice **simétrica** si coincide con su traspuesta, es decir, si ocurre que $a_{ij} = a_{ji}; \quad i = 1, 2, ..., n; \quad j = 1, 2, ..., n.$

➲ ***EJEMPLO:***

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ es simétrica.

2.5 Matriz triangular.

Aquella matriz cuadrada cuyos elementos situados por encima o por debajo de los que ocupan la diagonal principal sean nulos, se dice **triangular.**

➲ ***EJEMPLO:***

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ son triangulares.

2.6 Matriz diagonal.

Es una matriz cuadrada de modo que son igual a 0 todos los elementos situados fuera de la diagonal principal. Es decir, $a_{ij} = 0 \quad si \quad i \neq j$.

➲ ***EJEMPLO:***

La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ es diagonal.

2.7 Matriz escalar.

La matriz **escalar** es una matriz diagonal en la que todos los términos no nulos toman el mismo valor. Especialmente interesante y de amplio uso es la matriz escalar de valor 1, que recibe el nombre de matriz **unidad** (o **identidad).**

➲ ***EJEMPLO:***

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es escalar, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la unidad de orden 3.

3.- Operaciones con matrices.

3.1 Suma de matrices.

Se define la suma de dos matrices equidimensionales A =$(a_{ij})_{n \times m}$ y B = $(b_{ij})_{n \times m}$ como otra matriz S = (s_{ij}) de igual orden que las anteriores y cuyos elementos se obtienen mediante la suma de los términos respectivos de las matrices sumando. Es decir,

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad ; \forall i = 1, 2, ..., n \quad ; \forall j = 1, 2, ..., n$$

➲ ***EJEMPLOS:***

1. El número de emigrantes (en miles) con destino a las tres Comunidades Autónomas C_1, C_2 y C_3 provenientes de los países A, B, C y D en los años 1.987 y 1988, vienen expresados, respectivamente, por las matrices

1987: $\begin{pmatrix} 0'7 & 0'1 & 6'1 & 11'3 \\ 1'2 & 0'2 & 3'4 & 0'8 \\ 0'2 & 1'6 & 4 & 0'6 \end{pmatrix}$ 1988: $\begin{pmatrix} 0'6 & 0 & 3'2 & 10'5 \\ 0'9 & 0'1 & 1'9 & 0'1 \\ 0 & 0'8 & 3'3 & 0'1 \end{pmatrix}$

El total de la población recibida en las comunidades según el país de procedencia será:

$$\begin{pmatrix} 0'7 & 0'1 & 6'1 & 11'3 \\ 1'2 & 0'2 & 3'4 & 0'8 \\ 0'2 & 1'6 & 4 & 0'6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0'6 & 0 & 3'2 & 10'5 \\ 0'9 & 0'1 & 1'9 & 0'1 \\ 0 & 0'8 & 3'3 & 0'1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'3 & 0'1 & 9'3 & 21'8 \\ 2'1 & 0'3 & 5'3 & 0'9 \\ 0'2 & 2'4 & 7'3 & 0'7 \end{pmatrix}$$

Es decir, la Comunidad C_1, ha recibido 1.300 emigrantes del país A, 100 de B, etc. en los años 1987-88, y análogamente para el resto de comunidades.

2. La central lechera "VACA SERRANA" vende tres tipos de leche, desnatada, entera y semidesnatada a tres conocidos establecimientos: A, B y C. Las ventas en el primero y segundo semestre del año trua a.C. fueron:

	Primer semestre			Segundo semestre		
	Desnatada	Entera	Semidesnatada	Desnatada	Entera	Semidesnatada
A	**200**	**125**	**35**	**122**	**109**	**82**
B	**199**	**34**	**212**	**87**	**45**	**22**
C	**103**	**201**	**42**	**16**	**11**	**4**

(Todos estos datos han sido fielmente recogidos por escribas en piedras talladas por fino cincel). ¿Cuáles fueron las ventas de la prestigiosa firma "VACA SERRANA" en el año trua a.C.? La respuesta queda recogida en la siguiente suma de matrices:

$$\begin{pmatrix} 200 & 125 & 35 \\ 199 & 34 & 212 \\ 103 & 201 & 42 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 122 & 109 & 82 \\ 87 & 45 & 22 \\ 16 & 11 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 322 & 234 & 117 \\ 286 & 79 & 234 \\ 119 & 212 & 46 \end{pmatrix}$$

▪ ***ACTIVIDAD 1:***

En el barrio de "La Jota" hay un colegio de E.G.B y un instituto de Enseñanza Secundaria. Las matrices siguientes indican qué idioma estudian los alumnos, según sean chicos o chicas:

	Colegio de E.G.B.				***Instituto***		
	FR	*IN*	*AL*		*FR*	*IN*	*AL*
alumnos	*15*	*90*	*8*	*alumnos*	*12*	*85*	*8*
alumnas	*20*	*78*	*10*	*alumnas*	*15*	*60*	*5*

¿Cómo haremos para obtener el total de alumnos que estudian cada idioma, también diferenciando chicos y chicas?

3.2 Propiedades de la suma de matrices.

- ***ACTIVIDAD 2:***

*La **Actividad 1** ¿podrías haberla resuelto considerando en primer lugar los alumnos/as del Instituto y luego los del Colegio? ¿Por qué?*

- ***ACTIVIDAD 3:***

Si en el barrio hubiese un segundo colegio de E.G.B., con los siguientes datos:

Colegio de E.G.B.

	FR	*IN*	*AL*
alumnos	*12*	*71*	*8*
alumnas	*14*	*56*	*7*

a) ¿Cómo hallarías el total?

b) ¿Sería lo mismo añadir estos datos al total anterior que reunir primero a todos los de E.G.B. y luego sumarles los del Instituto? ¿Por qué?

- ***ACTIVIDAD 4:***

Hemos encontrado para la suma de matrices propiedades similares a las de la suma de números en las que, además, se basan aquellas.

a) ¿Podrías encontrar una matriz que jugase el papel del 0?, ¿qué condición debería cumplir?

b) Dada una matriz, ¿podrías encontrar otra opuesta a ella en el mismo sentido en que lo pueden ser dos números?, ¿cómo escribirías esto?.

- ***PROPIEDADES:***

Sean A, B y C tres matrices del mismo orden. Se cumple:

- (A + B) + C = A + (B + C) (*asociatividad*)
- A + B = B + A (*conmutatividad*)
- A + O = O + A , *siendo O la matriz nula del mismo orden que A.* (*elemento neutro*)
- A + (-A) = O, *con -A matriz **opuesta** de A, obtenida al cambiar de signo sus elementos.*

Esta última propiedad autoriza a definir una nueva operación, llamada **diferencia** de matrices de igual orden como

A - B = A + (-B)

puesto que siempre existe la opuesta de B.

3.3 Producto de una matriz por un número.

Es una operación de las llamadas **externas**, pues combina elementos de naturaleza distinta (*números y matrices*).

Si $t \in \Re \quad y \quad A_{mn}$ es una matriz, se define la nueva matriz $(t \cdot A)_{mn}$ que conserva el orden de A y cuyos elementos se obtienen multiplicando los de esa matriz por *t*. Así:

$$t \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t.a_{11} & t.a_{12} & .. & t.a_{1n} \\ t.a_{21} & t.a_{22} & .. & t.a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ t.a_{m1} & t.a_{m2} & .. & t.a_{mn} \end{pmatrix}$$

- ***ACTIVIDAD 5:***

El dueño de varias alfarerías pequeñas hace dos diseños para vajillas en dos de las plantas. La producción en la planta de Río Grande en un día es la siguiente:

	Tazas	Platos chicos	Platos	Tazones
Diseño Margarita	**200**	**200**	**150**	**30**
Diseño Girasol	**120**	**120**	**100**	**15**

Mientras que en la planta Villamar la producción asciende a:

	Tazas	Platos chicos	Platos	Tazones
Diseño Margarita	**130**	**110**	**80**	**0**
Diseño Girasol	**100**	**90**	**60**	**10**

a) ¿Cuántos artículos de cada diseño se producen en las dos plantas combinadas?

b) Estos diseños tienen un buen mercado y el dueño decide hacerlos también en su planta Ciudad Industrial. Estima que la producción de esta planta será proporcional a la producción de la fábrica de Río Grande y tres veces mayor. ¿Cuál será la producción en Ciudad Industrial? ¿Y en las tres?

- ***ACTIVIDAD 6:***

Una cantera distribuye diariamente 47 Tm de arena a tres almacenes que se encuentran, respectivamente, a 28, 12 y 21 Km, de la siguiente forma: 14 Tm al primero, 18 al segundo y 15 al tercero.

a) Representa los datos en una matriz.

b) Representa en una matriz los datos correspondientes a una semana (5 días), considerando el kilometraje total a cada almacén y la arena que se ha enviado a cada uno. ¿Cómo podrías relacionar las dos matrices?.

- ***ACTIVIDAD 7:***

*Si en la **Actividad 6** supiésemos que los tres almacenes reciben, además, arena de una segunda cantera situada a 15, 12 y 19 Km, respectivamente, y que se transportan a ellos 13, 7 y 16 Tm diarios, respectivamente:*

a) Expresa los datos en una matriz.

b) ¿Cómo podrías calcular el total semanal de desplazamientos y tonelaje que recibe cada almacén?

c) ¿Sería igual hallar primero lo que corresponde semanalmente a cada cantera y después sumarlo, que hallar antes el total diario y luego multiplicar por el número de días?

- ***ACTIVIDAD 8:***

La cantera de la Actividad anterior ha distribuido arena durante 18 días en el mes de enero y 20 días en febrero.

a) Calcula los totales de arena y desplazamientos realizados a cada almacén y expresa los resultados en forma de matriz.

b) ¿Sería igual si considerásemos el total de días trabajados, que si calculásemos lo que corresponde a cada mes y después lo sumamos?

- ***ACTIVIDAD 9:***

Si el transporte de arena se ha realizado el pasado año durante 43 semanas (cinco días laborables):

a) Representa en una matriz los resultados totales para cada almacén.

b) ¿Obtendríamos el mismo resultado considerando el número total de días que calculando primero el total semanal y luego multiplicando por el número de semanas?

PROPIEDADES:

Las propiedades de este producto son:

$$t\,.\,(A_{mn} + B_{mn}) = t\,.\,A_{mn} + t\,.\,A_{mn}$$

$$t\,.\,(h\,.\,A_{mn}) = (t\,.\,h)\,.\,A_{mn}$$

$$(t + h)\,.\,A_{mn} = t\,.\,A_{mn} + h\,.\,A_{mn}$$

$$1\,.\,A_{mn} = A_{mn}$$

3.4 Producto de matrices.

F *Producto de una matriz fila* F_{1n} *por una matriz columna* C_{n1}

Será conveniente poner un ejemplo para situarnos en el punto preciso:

➲ ***EJEMPLO :***

La matriz fila $F = \begin{pmatrix} 24'4 & 0'81 & 124'6 & 83'4 \end{pmatrix}$ indica los **tipos de cambio** (*pesetas que han de darse para adquirir una unidad monetaria extranjera*) del franco, escudo, dólar y marco, el 27 de octubre de 1.994. La matriz columna $C = \begin{pmatrix} 220 \\ 300 \\ 95 \\ 40 \end{pmatrix}$, nos da la cantidad de monedas citadas que un individuo posee en ese momento. La riqueza mantenida en moneda extranjera es por tanto:

$$F.C = \begin{pmatrix} 24'4 & 0'81 & 124'6 & 83'4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 220 \\ 300 \\ 95 \\ 40 \end{pmatrix} =$$

$$= 24'4 \cdot 220 + 0'81 \cdot 300 + 124'6 \cdot 95 + 83'4 \cdot 40 = 20.784 \quad ptas.$$

que resulta ser un número.

- Se define entonces, el **producto** de una matriz fila por una matriz columna con el mismo número de componentes, como la suma de los productos obtenidos al multiplicar términos correspondientes:

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = f_1.b_1 + f_2.b_2 + \dots + f_n.b_n = \sum_{i=1}^{n} f_i.b_i$$

F *Producto de una matriz fila* F_{1m} *por una matriz* A_{mn}

- Puesto que A puede considerarse formada por *n* matrices columna C_{mi}, *i= 1,2,...,n,* el resultado de multiplicar $F_{1m} \cdot A_{mn}$ serán ***n números*** (los *n* elementos de una matriz fila P_{1n}) resultantes de hacer el producto de F por cada columna citada, según el procedimiento expuesto en el punto anterior.

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} f_{1k}.a_{k1} & \sum_{k=1}^{m} f_{1k}.a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{m} f_{1k}.a_{kn} \end{pmatrix}$$

F *Producto de* A_{pm} *y* B_{mn}

Comenzaremos con un ejemplo previo para ilustrar la situación:

➲ *EJEMPLO:*

La compañía "Motor Crak" fabrica tres modelos de automóviles: "Saleroso", "Brioso" y "Sinforoso". Diariamente produce 500 turismos "Saleroso" de lujo y 350 turismos "Saleroso" de tipo normal. Asimismo, fabrica 400 L. y 200 N. de su modelo "Brioso" y 300 L. y 550 N. de su modelo "Sinforoso". Cada coche de lujo lleva 2 bocinas y 10 lámparas y cada uno del tipo normal lleva 1 bocina y 6 lámparas.

(a) Representa en dos matrices diferentes ambas informaciones.

(b) Halla el número de bocinas que se necesitan diariamente para equipar los modelos "Saleroso".

(c) Halla el número de lámparas necesarias cada día para equipar los modelos "Sinforoso".

(d) Representa en una matriz las bocinas y lámparas que precisamos diariamente para equipar los tres modelos (independientemente del modelo).

(a) Las matrices pedidas son:

Matriz A

	Lujo	Normal
Saleroso	***500***	***350***
Brioso	***400***	***250***
Sinforoso	***300***	***550***

Matriz B

	Bocinas	Lámparas
Lujo	***2***	***10***
Normal	***1***	***6***

(b) Para equipar de bocinas los modelos "Saleroso" se necesitan cada día:

(500 x 2) + (350 x 1) = 1.350 bocinas.

Se han multiplicado la primera fila de A y la primera columna de B.

(c) Para equipar de lámparas los "Sinforoso" se necesitan:

(300 x 10) + (350 x 6) = 6.300 lámparas.

(d) Se trata de completar una matriz que tenga como entrada horizontal los modelos "Saleroso", "Brioso" y "Sinforoso", y como entrada vertical en número de bocinas y de lámparas que lleva montado cada modelo. En total, son seis términos, de los cuales hemos conocido dos a través de los apartados anteriores. Análogamente, obtenemos los restantes. La matriz resultante es:

$$\begin{pmatrix} 500 & 350 \\ 400 & 250 \\ 300 & 550 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500.2+350.1 & 500.10+350.6 \\ 400.2+250.1 & 400.10+250.6 \\ 300.2+550.1 & 300.10+550.6 \end{pmatrix} =$$

	Bocinas	**Lámparas**
Saleroso	***1.350***	***7.100***
Brioso	***1.050***	***5.500***
Sinforoso	***1.150***	***6.300***

♦ Multiplicar las matrices A_{pm} y B_{mn} consiste en determinar la matriz C_{pn} = A.B cuyo orden y términos resultarán de aplicar los procedimientos expuestos en los párrafos precedentes:

La matriz A contiene **p filas**, por lo que habremos de multiplicar cada una de ellas por B: la primera fila de A por B, nos dará la primera fila del producto, compuesta por *n* números, la segunda fila de A por B, nos dará la segunda fila también de *n* números,... la *p-ésima* fila de A por B nos dará la *p-ésima* fila de la nueva matriz, que tendrá entonces tantas filas como A y tantas columnas como B. Cada uno de sus elementos se ha obtenido así:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}, \text{ i=1,2,...,p; j=1,2,...,n}$$

➲ ***EJEMPLO:***

Un constructor tiene cuatro estilos de casas que construye en tres diferentes lugares. Cada casa tiene varios modelos de puertas como se describe en la tabla 1, y el costo unitario de cada tipo de puerta en cada lugar se describe en la tabla 2:

Tabla 1	Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3
Casa A	***2***	***6***	***5***
Casa B	***3***	***8***	***9***
Casa C	***3***	***9***	***10***
Casa D	***4***	***7***	***15***

Tabla 2	Lugar 1	Lugar 2	Lugar 3
Puerta 1	***20***	***23***	***18***
Puerta 2	***25***	***26***	***24***
Puerta 3	***18***	***20***	***19***

Para determinar la matriz que muestre el costo de las puertas en cada casa de cada lugar, debemos efectuar el siguiente producto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 23 & 18 \\ 25 & 26 & 24 \\ 18 & 20 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 & 302 & 275 \\ 422 & 457 & 417 \\ 465 & 503 & 460 \\ 525 & 574 & 525 \end{pmatrix}$$

3.5 Propiedades del producto.

- ***ACTIVIDAD 10:***

Los individuos de cierta especie de escarabajos no alcanzan a cumplir los tres años de edad. De los menores de 1 año sobreviven la mitad, y de los que tienen entre 1 y 2 años sólo 1/3. Se reproducen únicamente los mayores, después de haber cumplido los 2 años, con una descendencia media de 6 nuevos escarabajos por individuo.

a) Si designamos por x, y, z a los individuos que hay en cada grupo de edad, ¿cuántos habrá al año siguiente?

b) Forma una matriz tal que al multiplicarla por la matriz fila (x y z) proporcione el resultado a la pregunta anterior.

c) ¿Y después de 2 años? ¿Y de 3?

d) Si inicialmente hubiese 30 individuos en cada grupo de edad, ¿cuántos habría al año, a los dos años, y a los tres?

- ***ACTIVIDAD 11:***

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ *calcula A x B. ¿Qué sucedería si intentásemos multiplicarlas en orden inverso?*

- ***ACTIVIDAD 12:***

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A x I e I x B.

b) ¿En qué casos podremos afirmar que A x I = I x A = A?

c) Con las matrices A y B anteriores y la matriz $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$*, comprueba que:*

A x (B x C) = (A x B) x C.

d) Busca tres matrices A, B y C tales que sea posible plantear la igualdad A x(B + C)= = A x B + A x C, y comprueba si se verifica.

❑ *PROPIEDADES:*

♦El producto de matrices *no es, en general, conmutativo*. Nótese que dos matrices pueden, en un determinado orden, multiplicarse, pero invirtiendo el orden puede no tener ni siquiera sentido el producto.

♦El producto de matrices cuadradas tiene un elemento neutro: la matriz identidad del orden apropiado. La matriz identidad de orden *n* es una matriz diagonal cuyos elementos son la unidad. $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}$. Si A es una matriz de orden *n x m* se verifica:

$$A_{nm} \,.\, I_m = A_{nm} \,;\; I_n \,.\, A_{nm} = A_{nm}$$

Observar que el producto por la matriz identidad es conmutativo, a pesar de que el producto de matrices no es, en general, conmutativo.

- ♦ *Asociatividad:* Si A, B y C son matrices multiplicables se tiene $A.(B.C) = A.(B.C)$
- ♦ *Distributividad:* Si A, B y C son matrices de órdenes apropiados $A.(B + C) = A.B + A.C$
- ♦ ***Matriz inversa:*** Restringiéndonos al conjunto de matrices cuadradas, una matriz A_n se dirá **invertible** o que tiene matriz **inversa**, si existe otra matriz cuadrada del mismo orden, que se denota por A^{-1}, tal que

$$A \,.\, A^{-1} = A^{-1} \,.\, A = I_n$$

➲ ***EJEMPLO:***

Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ su inversa es A^{-1} = $\begin{pmatrix} -8 & -15 & 13 \\ 4 & 7 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ pues se verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -8 & -15 & 13 \\ 4 & 7 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -15 & 13 \\ 4 & 7 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

- ♦ El hecho de que no toda matriz cuadrada sea invertible, obliga a advertir que no siempre de una igualdad entre matices como A . B = A . C, puede deducirse que B = C. Ello sólo es cierto si A tiene inversa, pues entonces multiplicando por A^{-1} los dos miembros de la citada igualdad, se obtiene que

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot B=\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot C\Rightarrow \quad B=C$$

➲ ***EJEMPLO:***

La siguiente igualdad es totalmente correcta:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -6 & -4\end{pmatrix}$$

sin embargo, evidentemente, las matrices $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ no son iguales.

4.- Ecuaciones matriciales.

Una **ecuación matricial** es una igualdad en la que las incógnitas que figuran en ella son **matrices**. Se considerarán ecuaciones lineales, que como ya es sabido, se caracterizan porque las incógnitas solamente pueden estar sometidas a la operación producto por un número real.

Una ecuación del tipo señalado sería

$$2\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}+3\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

donde X es la matriz incógnita.

La resolución de estas ecuaciones se efectúa teniendo en cuenta las propiedades de la suma y producto por un número de la matrices, cuya similitud con la suma y producto numéricos provoca análogas técnicas de resolución de ecuaciones. Así, en la ecuación dada tenemos

$$\begin{pmatrix}2 & -4\\ 6 & 2\end{pmatrix}+3\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

y sumando la opuesta de $\begin{pmatrix}2 & -4\\ 6 & 2\end{pmatrix}$ a los dos miembros de la igualdad, resulta

$$3\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -7 & 2\end{pmatrix}$$

y multiplicando por 1/3

$$X=\begin{pmatrix}\frac{-2}{3} & 2\\ \frac{-7}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Otras ecuaciones **no lineales** que pueden plantearse son de la forma

$$A \,.\, X + B = C \quad \text{o} \quad X \,.\, A + B = C$$

donde A, B y C son matrices conocidas y X es la matriz incógnita.

Si la matriz A no es invertible, la ecuación puede no tener solución o incluso, no ser única.

- ***ACTIVIDAD 13:***

Halla la matriz X en las ecuaciones:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2X = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

5.- Expresión matricial de un sistema.

5.1 Expresión matricial de un sistema.

Un sistema de ecuaciones lineales como el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - z - 3t = 1 \\ -x + y - 4z + t = 0 \\ 2x - y - 2t = 3 \end{array}\right\}$$

puede representarse, haciendo uso del producto de matrices, como una ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En general, un sistema con *m* ecuaciones y *n* incógnitas

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

admite la forma de escritura

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A \,.\, X = B \ (*)$$

siendo ***A*** la **matriz de coeficientes** del sistema, ***X*** la matriz de las **incógnitas** y ***B*** la matriz de los **términos independientes**.

Un caso especialmente interesante del sistema matricial surge cuando la matriz de los coeficientes A es cuadrada e invertible, pues entonces la ecuación matricial (*) puede resolverse (y, por tanto, el sistema lineal que representa). En efecto, si multiplicamos la ecuación $A \,.\, X = B$ por A^{-1}, inversa de A, se obtiene

$A^{-1} \,.\, A \,.\, X = A^{-1} \,.\, B \; ; \quad (A^{-1} \,.\, A) \,.\, X = A^{-1} \,.\, B \; ; \; I \,.\, X = A^{-1} \,.\, B \; ;$ y

$$\boldsymbol{X = A^{-1} \,.\, B}$$

5.2 Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan.

Se presentará el método actuando sobre el siguiente ejemplo.

➲ ***EJEMPLO:***

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ una matriz invertible, es decir, existe $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 3a-2c & 3b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que equivale a los sistemas:

$\left.\begin{matrix} a-c=1 \\ 3a-2c=0 \end{matrix}\right\} \quad y \quad \left.\begin{matrix} b-d=0 \\ 3b-2d=1 \end{matrix}\right\}$ o matricialmente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Estos sistemas tienen igual matriz de los coeficientes, pudiéndose resolver simultáneamente por el método de Gauss, sin más que disponer la matriz

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

cuyas dos primeras columnas constituyen la matriz de los coeficientes común a los sistemas y las columnas tercera y cuarta son los términos independientes. Apliquemos transformaciones elementales de Gauss a la matriz formada:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{matrix}}_{A} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 1 & \end{array}\right)$$

Al incorporar las incógnitas, obtendríamos los sistemas equivalentes a los iniciales siguientes:

$\left.\begin{array}{l} a=-2 \\ c=-3 \end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{l} b=1 \\ d=1 \end{array}\right\}$. Por tanto, la matriz inversa es $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

- En definitiva y según el ejemplo visto, el método consiste en aplicar a una matriz de la forma *(A / I)* una serie de transformaciones elementales de Gauss hasta llegar a la matriz *(I / A^{-1}).*

5.3 Rango de una matriz.

Intentaremos aproximarnos al concepto de rango de una matriz mediante distintos ejemplos.

EJEMPLO 1:

Consideremos la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 14 \end{pmatrix}$. Efectuaremos sobre sus filas las transformaciones elementales de Gauss con el fin de obtener una matriz escalonada. Para ello:

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 14 \end{pmatrix} \underset{F_2-2F_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Esto significa que las filas de A se pueden escribir así:

$$F_2 - 2F_1 = O_{13} \Rightarrow \quad F2 = 2.F1$$

(Considerando a ***F2 , F1*** y ***O13*** como matrices fila de orden 1 x 3)

y que la fila segunda depende linealmente de la primera. Diremos, en este caso, que la matriz A tiene **rango 1** puesto que la matriz escalonada que hemos obtenido sólo tiene una fila con algún elemento distinto de cero. (rango 1 = al número de **filas**, la primera únicamente, **linealmente independientes**).

EJEMPLO 2 :

Sea ahora la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 20 \end{pmatrix}$. Al igual que en el ejemplo anterior, si aplicamos las transformaciones elementales sobre sus filas obtenemos:

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 20 \end{pmatrix} \underset{F_2-2F_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. En este caso no hemos podido escribir una fila como combinación lineal de la otra, esto significa que **las dos filas son linealmente independientes** y por consiguiente que su **rango es 2**, es decir, dos filas cada una de ellas con algún elemento distinto de cero.

EJEMPLO 3:

Consideremos la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Realizaremos en A, al igual que en los ejemplos anteriores, las transformaciones elementales de Gauss sobre sus filas, con el fin de obtener una matriz escalonada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \\ F_4-5F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & -6 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{F_3-F_2 \\ F_4-2F_2}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto significa que:

1. Las filas de la matriz A se pueden escribir así:

F3 - 3F1 - (F2 -2F1) = O15, es decir, ***F3 = F1 + F2***

y, F4 - 5F1 - 2(F2 - 2F1) = O15 , es decir, ***F4= F1 + 2F2,***

2. Las filas tercera y cuarta (que se pueden considerar como matrices fila) son combinación lineal de las filas primera y segunda de A.

3. Las filas primera y segunda son linealmente independientes y, por tanto el **rango de la matriz A es 2**, es decir, dos filas cada una de ellas con algún elemento distinto de cero.

- Considerando las filas (*o las columnas*) de una matriz como vectores-fila (*o vectores-columna*), podemos hablar de dependencia o independencia lineal de las mismas y, consecuentemente, de rango por filas (*o por columnas*).

- Es posible demostrar que el rango por filas de una matriz coincide con el rango por columnas. También se puede demostrar que el rango de una matriz es igual al de la matriz escalonada que se obtiene al realizar sobre la dada las transformaciones elementales de Gauss.

- ***Definición:*** El **rango** de una matriz es el número de filas (*o de columnas*) linealmente independientes. Por lo tanto, una vez determinada la correspondiente matriz escalonada, diremos que el rango es el número de filas (*o de columnas*) con algún elemento distinto del cero.

▪ *ACTIVIDAD 14:*

a) Determina el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) Discute la existencia de solución y resuelve, si es posible, el sistema de ecuaciones lineales:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Cambiando una sola ecuación, convierte el sistema de ecuaciones lineales del apartado anterior en un sistema que tenga infinitas soluciones. Calcula dichas soluciones.