Sistemas de ecuaciones lineales

1.- Ecuaciones lineales

➢ 1.1 Definiciones :

- La palabra **ecuación** designa en Matemáticas la igualdad que establece una relación entre variables desconocidas.
- Una ecuación se llama **lineal** si es de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

donde x_1, x_2, ..., x_n son las **incógnitas**, a_1, a_2,...,a_n,b son números reales conocidos llamados **coeficientes**.

- Se llama **solución** o raíz de una ecuación a los valores (s_1,s_2,...,s_n) que, sustituidos simultáneamente en cada incógnita, hacen que la igualdad se haga evidente.

☑ ***ACTIVIDAD 1:***

Un grupo de amigos acuden a una tienda y compran "bocatas" y refrescos para merendar. Hacen el siguiente pedido:

3 "bocatas" de jamón, 2 de queso y 5 refrescos

que cuesta 1.800 ptas.

(a) ¿Cuánto cuesta cada artículo?

(b) ¿Cuánto costarían las siguientes compras?:

6 "bocatas" de jamón, 4 de queso y 10 refrescos

9 "bocatas" de jamón, 6 de queso y 15 refrescos

12 "bocatas" de jamón, 8 de queso y 20 refrescos

15 "bocatas" de jamón, 10 de queso y 25 refrescos

(c) ¿Qué compra costaría 18.000 ptas.?

(d) ¿Podemos determinar el coste de la siguiente compra?:

2 "bocatas" de jamón, 5 de queso y 10 refrescos

(e) Si el coste de la compra del apartado (d) es de 2.600 ptas., ¿cuánto costarían las siguientes compras?:

4 "bocatas" de jamón, 10 de queso y 20 refrescos

6 "bocatas" de jamón, 15 de queso y 30 refrescos

8 "bocatas" de jamón, 20 de queso y 40 refrescos

(f) ¿Qué compra costaría 15.600 ptas.?

(g) ¿Cuánto costaría ésta?:

5 "bocatas" de jamón, 7 de queso y 15 refrescos

(h) ¿Cuánto costarían las siguientes compras?:

9 "bocatas" de jamón, 17 de queso y 35 refrescos

8 "bocatas" de jamón, 9 de queso y 20 refrescos

13 "bocatas" de jamón, 16 de queso y 35 refrescos

➢ 1.2 Ecuaciones equivalentes.

- **Definición:** Dos ecuaciones son equivalentes si tienen exactamente las mismas soluciones.
- **Transformaciones que conservan las soluciones:**

(1) La simplificación en cada miembro.

(2) Sumar o restar el mismo número a los dos miembros de la ecuación.

(3) Multiplicar o dividir ambos miembros de una ecuación por el mismo número **distinto de cero**.

➢ 1.3 Resolución y discusión de la ecuación ax = b.

En la resolución de la ecuación $a \cdot x = b$ se pueden plantear tres casos:

(1) Si $a \neq 0$, la ecuación tiene SOLUCIÓN ÚNICA ($x = \frac{b}{a}$).

(2) Si a = 0 y b = 0, la ecuación tiene INFINITAS SOLUCIONES. (Cualquier número real satisface la igualdad).

(3) Si a = 0 y b ≠0, la ecuación NO tiene SOLUCIÓN.

2.- Sistemas de ecuaciones lineales

➢ 2.1 Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

☐ ***DEFINICIÓN :***

Se llama **sistema de dos ecuaciones lineales** a un conjunto de dos ecuaciones lineales cuyas soluciones (si las hay) han de ser simultáneamente soluciones de las dos ecuaciones del sistema.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se denota así:

$$(1)\left\{\begin{array}{c} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right.$$

dónde a,b,c,a',b'y c' son números reales conocidos y *"x"* e *"y"* son las incógnitas.

☐ ***DEFINICIÓN :***

El conjunto de números reales ordenados (s_1,s_2) es una **solución** del sistema (1) si, sustituidos en lugar de las incógnitas respectivas, los dos miembros de las ecuaciones toman el mismo valor.

☑ ***ACTIVIDAD 2:***

Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas:

$$(a)\left\{\begin{array}{c} x+2y=4 \\ x-y=1 \end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{c} x+2y=4 \\ 2x+4y=13 \end{array}\right. \quad (c)\left\{\begin{array}{c} x+2y=4 \\ 2x+4y=8 \end{array}\right.$$

Clasifica los sistemas en función de las soluciones obtenidas.

Representa los sistemas anteriores en un sistema de coordenadas.

☑ ***ACTIVIDAD 3:***

Representa las rectas

$$\begin{array}{rl} r: & y=-2x+6 \\ s: & y-x+6=0 \end{array}$$

y determina su punto común.

(a) Encuentra una tercera ecuación de una recta t de forma que el sistema formado por las tres tenga solución única.

(b) La misma cuestión para que ahora el sistema no tenga solución.

(c) ¿Puede buscarse la 3ª ecuación de forma que el sistema tenga infinitas soluciones? Escribe un sistema de tres rectas con infinitas soluciones

(d) ¿Podrías encontrar alguna relación entre los coeficientes de las ecuaciones, en cada uno de los tres casos anteriores?

➢ 2.2 Sistemas de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas.

☐ ***DEFINICIÓN :***

Un sistema de ***m*** ecuaciones lineales con ***n*** incógnitas general se escribe:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

donde a_{ij} es el coeficiente de la ecuación *i-ésima* que multiplica a la incógnita x_j y los b_i son los términos independientes. Resolver el sistema es encontrar, si existen, valores de las incógnitas que cumplan a la vez todas las ecuaciones del sistema.

□ ***DEFINICIÓN :***

Un conjunto de números reales ordenados $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ es una **solución** del sistema anterior si, sustituidos en lugar de las incógnitas respectivas, los dos miembros de cada una de las *"m"* ecuaciones del sistema toman el mismo valor.

□ ***CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS SEGÚN LAS SOLUCIONES:***

- Un sistema se llama **compatible** si tiene, al menos, una solución.

  Si esta solución es única, se dice **determinado**, mientras que si hay más de una se llama **indeterminado**.

- Un sistema se llama **incompatible** si no tiene soluciones.

☑ ***ACTIVIDAD 4:***

El comisario Flórez recibió un chivatazo totalmente fiable: en la ciudad se venden 2 papelinas y una china por 45 dólares, pero desconoce el precio de cada una. Transmite esta información a los agentes Antonio, Benito y Carolina y los envía a tres puntos de la ciudad para que averigüen estos precios. Cada uno de ellos consigue nueva información y, celoso de su éxito, no se la comunica a sus colegas.

Antonio averigua que 6 papelinas y 3 chinas se vendieron por 112 dólares, Benito que 4 papelinas y 2 chinas costaron 90 dólares y Carolina que por 3 papelinas y 2 chinas se cobra 72 dólares.

Solamente uno de los investigadores consiguió saber los precios reales. ¿Cuál de ellos? ¿Qué sucede con los otros dos?

☑ ***ACTIVIDAD 5:***

Se quiere llenar una piscina de 40 m^3 de capacidad con cuatro grifos. ¿Qué cantidad de agua deberá aportar cada uno?

Añade la condición de que el primer grifo aporte 10 m^3 más que los otros tres juntos.

Inventa dos condiciones más para obtener una única solución.

☑ ***ACTIVIDAD 6:***

Escribe un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas cuya solución única sea (-5, 2).

Escribe un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas cuya solución única sea (2,0,3).

Escribe un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas con infinitas soluciones: $(2+z, -2+2z, z)$.

☑ ***ACTIVIDAD 7:***

Forma un sistema equivalente a $\left\{\begin{array}{l} x-2y=3 \\ 2x-y=9 \end{array}\right.$

¿Cómo lo has hecho?

Comprueba que las soluciones son las mismas y explica por qué no han variado.

3.- Sistemas de ecuaciones equivalentes

☐ ***DEFINICIÓN :***

Dos sistemas, con las mismas incógnitas, se llaman **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. (*Nótese que no se ha impuesto ninguna condición sobre el número de ecuaciones*).

➢ 3.1 Transformaciones elementales de un sistema.

Existen transformaciones sobre las ecuaciones de un sistema que pasan de ese sistema a otro equivalente a él. Estas transformaciones son:

1. Si en un sistema, una ecuación se multiplica por un número real diferente de cero, se obtiene otro equivalente.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y=2 \\ x+y=7 \end{array}\right\} \xleftrightarrow[3\cdot E2]{} \left.\begin{array}{r} 2x-3y=2 \\ 3x+3y=21 \end{array}\right\}$$

2. Si se sustituye en un sistema una ecuación por la resultante de la suma de ésta con otras ecuaciones del mismo sistema, después de haber sido multiplicadas por números cualesquiera, resulta un sistema equivalente al primero.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y=2 \\ 3x+3y=21 \end{array}\right\} \xleftrightarrow[E3 \to E3+E1]{} \left.\begin{array}{r} 2x-3y=2 \\ 5x=23 \end{array}\right\}$$

3. Si en un sistema se resuelve una ecuación de una incógnita y la expresión resultante se sustituye en las demás ecuaciones, el sistema formado por la ecuación resuelta y las obtenidas por la sustitución es equivalente al primero.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y=2 \\ 5x=23 \end{array}\right\} \quad \leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{r} \frac{46}{5}-3y=2 \\ x=\frac{23}{5} \end{array}\right\}$$

4. Si en un sistema una ecuación es combinación lineal de otras, entonces puede suprimirse del sistema, obteniendo un sistema equivalente pero con una ecuación menos.

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=6 \\ 2x-y=5 \\ -x+11y=8 \end{array}\right\} \xleftrightarrow[E3=3\cdot E1-2\cdot E2]{} \left.\begin{array}{r} x+3y=6 \\ 2x-y=5 \end{array}\right\}$$

4.- Método de Gauss

Nos planteamos la necesidad de encontrar un procedimiento eficaz para resolver sistemas y para ello nos apoyaremos en el método de reducción y en las transformaciones elementales de un sistema.

Comenzaremos con un ejemplo:

❑ ***EJEMPLO 1:***

Tratamos de resolver el sistema (1): $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=2 \\ x+3y-z=-2 \\ 3x+4y+3z=0 \end{array}\right\}$, buscando un sistema equivalente que sea **escalonado** o triangular, es decir, cada ecuación tiene una incógnita menos que el anterior:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=2 \\ x+3y-z=-2 \\ 3x+4y+3z=0 \end{array}\right\} \xleftrightarrow[\substack{E2\to E2-E1 \\ E3\to E3-3\cdot E1}]{} \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=2 \\ y-4z=-4 \\ -2y-6z=-6 \end{array}\right\} \xleftrightarrow[E3\to E3+2E2]{}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=2 \\ y-4z=-4 \\ -14z=-14 \end{array}\right\} \underset{T3}{\leftrightarrow} \left.\begin{array}{r} x=-1 \\ y=0 \\ z=1 \end{array}\right\}$$

En el ejemplo anterior, observa que sólo se opera sobre los coeficientes y términos independientes. En cierto modo, pues, en inútil andar escribiendo las variables y el signo igual, pues siempre se ponen en las mismas posiciones (relativas).

Si decidimos respetar las posiciones relativas de los símbolos *x, y, z, =* y escribimos sólo la tabla de los coeficientes y términos independientes del siguiente modo:

En vez de (1) usamos la tabla: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Llamamos **matriz ampliada** del sistema a la tabla anterior.

El método seguido en el ejemplo consiste en aplicar ordenadamente las reglas de equivalencia a las lineas horizontales (*filas*) de la matriz ampliada, dando por terminado el proceso cuando tal matriz sea de la siguiente forma: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{pmatrix}$.

❑ ***EJEMPLO 2:***

Resuelve el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=40 \\ x-y-z-t=10 \\ x+2y+z-10t=28 \\ 2x-4y+z-t=11 \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & -10 & 28 \\ 2 & -4 & 1 & -1 & 11 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{E2\to E2-E1 \\ E3\to E3-E1 \\ E4\to E4-2\cdot E1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -30 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & -12 \\ 0 & -6 & -1 & -3 & -69 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\xleftrightarrow[\substack{E3\to E3-\frac{1}{2}\cdot E2 \\ E4\to E4-3\cdot E2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -30 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -27 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 21 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[E4\to E4+5\cdot E3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -30 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & -57 & -114 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z+t=40 \\ -2y-2z-2t=-30 \\ -z-12t=-27 \\ -57t=-114 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=25 \\ y=10 \\ z=3 \\ t=2 \end{array}\right\}$$

☑ ***ACTIVIDAD 8:***

Comprueba que la solución obtenida en el ejemplo anterior lo es del sistema inicial y de todos los sistemas intermedios que han surgido.

➢ 4.1 Breve explicación del método de Gauss y justificación de su validez.

- **Explicación:** Consideremos el sistema :

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\}$$

La idea esencial del método de Gauss consiste en la sustitución de una ecuación por la resultante de sumar (restar) a ella misma un múltiplo de otra convenientemente elegida, como por ejemplo:

$$E2-\tfrac{a_{21}}{a_{11}}\cdot E1, \quad \ldots$$

salvando ceros en el denominador.

- **Justificación:** Si $(s_1, s_2, ..., s_n)$ es una solución del sistema cumplirá todas y cada una de las ecuaciones; en particular la 1ª y 2ª.

Al multiplicar los dos miembros de una igualdad por un número, ésta sigue siendo válida:

$$-\tfrac{a_{21}}{a_{11}} \cdot E1$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades obtendremos una nueva igualdad:

$$E2 + (-\tfrac{a_{21}}{a_{11}} \cdot E1)$$

y así para cualquier otra.

Faltaría por ver que si se verifican

$$E1 \quad y \quad E2 - \tfrac{a_{21}}{a_{11}} \cdot E1, ...,$$

entonces se verifican $E1, E2, ...,$ lo que resulta del razonamiento anterior pues

$$E2 = (E2 - \tfrac{a_{21}}{a_{11}} \cdot E1) + (\tfrac{a_{21}}{a_{11}} \cdot E1)$$

❑ ***EJEMPLO 3:***

En este ejemplo se muestra como aquellas ecuaciones cuyos coeficientes se anulan corresponden a informaciones redundantes (son "combinación" de otras) y, por tanto, pueden suprimirse. En efecto, aplicando el método de Gauss al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{array}\right\}$$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{E2 \to E2 - 5 \cdot E1 \\ E3 \to E3 - E1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\xleftrightarrow[E3 \to (E3 - E1) - \frac{1}{2} \cdot (E2 - 5 \cdot E1)]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que significa que: $(E3 - E1) - \frac{1}{2} \cdot (E2 - 5 \cdot E1) = 0$, es decir:

$$E3 = (\tfrac{-3}{2}) \cdot E1 + \tfrac{1}{2} \cdot E2$$

La tercera ecuación es "combinación" lineal de la primera y segunda. Podemos prescindir de ésta última ecuación ya que no contiene ninguna información. Tendremos entonces que el sistema dado es equivalente al sistema escalonado siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+7z=10 \\ 14y-34z=-42 \end{array}\right\}$$

Y, asignando valores a *z* (o a *y*), obtenemos el conjunto solución:

$$(1+\tfrac{2}{7}\cdot z, \quad -3+\tfrac{17}{7}\cdot z, \quad z)$$

Una vez triangulado un sistema, si quedan más incógnitas *(n)* que ecuaciones *(r)*, cada solución concreta se obtiene asignando valores a *n - r* incógnitas, que llamamos *libres*, y resolviendo a partir de ellas el sistema reducido así planteado.

➢ 4.2 Rango de un sistema.

☐ ***DEFINICIÓN :***

El número de ecuaciones que forman el sistema escalonado (o triangular) obtenido después de la aplicación del método de Gauss es **invariante** para cada sistema: *se llama **rango** del sistema y consiste en el número de ecuaciones "independientes"* que hay en el sistema inicial ya que las que se suprimen "dependen" de las que quedan.

☑ ***ACTIVIDAD 9:***

Si aplicamos el método de Gauss al sistema de Ejemplo 3 con las ecuaciones en otro orden ¿nos llevaría también a un sistema con dos ecuaciones? En caso afirmativo ¿las soluciones serían las mismas?. Realiza los cálculos partiendo de la siguiente ordenación:

$$\left.\begin{array}{c} x+4y-10z=-11 \\ 5x-y+z=8 \\ x-3y+7z=10 \end{array}\right\}$$

☑ ***ACTIVIDAD 10:***

Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{c} 2x+5y=16 \\ x+3y-2z=-2 \\ x+z=4 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} -x+2y-3z=-2 \\ -x+8y-27z=0 \\ x-y-z=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} 2x+y=1 \\ 3x+2y=4 \\ x+y=3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} x+y+w=6 \\ x+z-w=-1 \\ y+z+w=6 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} 2x-y+3z=3 \\ x+z=1 \\ 4x-y+5z=5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} 2x-5y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$$

➢ 4.3 Clasificación de los sistemas.

Pretendemos clasificar los sistemas escalonados obtenidos tras la aplicación del método de Gauss. Para ello utilizaremos la notación matricial anteriormente indicada.

Si el sistema escalonado obtenido por Gauss tiene *r* ecuaciones, pueden presentarse los siguientes casos:

1. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & .. & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 0 & b_r \end{pmatrix}$ La última fila indica una ecuación de la forma $0 = b_r$ con $b_r \neq 0$; el sistema es **incompatible.**

2. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & .. & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$ Donde todos los a_{ii} son distintos de cero y además $r = n$, quedando el sistema final con tantas ecuaciones como incógnitas; el sistema en este caso es **compatible y determinado.**

3. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & .. & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & .. & .. & .. & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & a_{rr} & .. & a_{rn} & b_r \end{pmatrix}$ También en este caso todos los a_{ii} son distintos de cero, pero *r* < *n*, menos ecuaciones que incógnitas; el sistema es **compatible e indeterminado.**

☑ ***ACTIVIDAD 11:***

Dado el sistema $\left.\begin{matrix} x+y-z=5 \\ x-y-z=7 \end{matrix}\right\}$ *, añadir una nueva ecuación de modo que el nuevo sistema sea:*

(a) (siga siendo) compatible e indeterminado

(b) incompatible

(c) compatible y determinado.

☑ ***ACTIVIDAD 12:***

Un grupo de chicas y chicos del instituto ganó un premio, concedido por la agencia de viajes "Europa", en un concurso televisivo. Consiste aquél en un viaje por distintas ciudades de Francia, Italia y Suiza, debiendo alojarse y comer en hoteles y restaurantes previamente concertados, cuyos precios, por persona y día, se exponen en la tabla siguiente:

	Francia	**Italia**	**Suiza**
hotel (con desayuno)	8.000 ptas.	6.000 ptas.	7.000 ptas.
restaurante (comida y cena)	5.000 ptas.	4.000 ptas.	4.000 ptas.

Las cantidades totales asignadas por persona son de 70.000 ptas. en hoteles y 44.000 ptas. en restaurantes. Se impone además la condición de que cada día completo debe permanecerse en la ciudad que se haya elegido. ¿Cómo os organizaríais el viaje?

☑ ***ACTIVIDAD 13:***

Hierón, rey de Siracusa, dio a un orfebre 7.465 g de oro para que éste hiciese una corona que iría dedicada al dios Júpiter.

Una vez se la hubo entregado, sospechó Hierón que parte del oro había sido sustituido por plata y mandó llamar al sabio Arquímedes para que lo averiguase sin dañar la corona.

Arquímedes sumergió la corona en agua y, llevándola a una balanza, vio que perdía 467 g de su peso. Sabía que el oro sumergido en agua perdía 52 milésimas por cada gramo, y 92 la plata.

¿Eran fundadas las sospechas del rey?

☑ ***ACTIVIDAD 14:***

Una cooperativa recoge papel usado para reciclar, que clasifica en tres tipos: alto, medio y bajo.

Ha realizado tres pruebas con diferentes mezclas: en la primera se han obtenido 4 Kg, habiéndose utilizado 2, 3 y 1 Kg de cada tipo, respectivamente; en la segunda, con 1, 2 y 3 Kg se produce un total de 5 Kg; y en la tercera 3 Kg con 3, 1 y 2 Kg.

¿Cuál es el rendimiento de cada tipo de papel?

5.- Sistemas homogéneos

☐ ***DEFINICIÓN:***

Un sistema es homogéneo cuando los términos independientes de todas las ecuaciones valen cero.

Por ejemplo: $$\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \\ -x+y+4z=0 \end{array}\right\}$$

- Estos sistemas siempre tienen solución: al menos $(x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0)$. A esta solución, inmediata siempre, se le llama **solución trivial.** El interés de estos sistemas radica en que tengan otras soluciones distintas de la trivial.

- De lo dicho en el caso general se deduce que un sistema homogéneo tendrá soluciones distintas de la trivial cuando sea equivalente a otro sistema escalonado con menor número de ecuaciones que de incógnitas.

- La matriz ampliada asociada a un sistema homogéneo tiene siempre la última columna toda de ceros, por lo que permanecerá invariante al aplicar las transformaciones a sus filas. Si eliminamos esa columna obtenemos *la matriz de los coeficientes* que será la que utilicemos para obtener el sistema escalonado equivalente.

❑ ***EJEMPLO 4:***

Sea el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \\ -4x-7y+4z=0 \end{array}\right\}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes asociada al sistema. Aplicando el método de Gauss obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[E3+4\cdot E1]{E2-2\cdot E1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[E3+3E2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema escalonado equivalente al dado es: $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$. Y asignando valores a *x* obtenemos el conjunto solución: $(x, 0, x)$. Por lo tanto, este sistema tiene soluciones distintas de la solución trivial.

Ejercicios

1. Resolver los siguientes sistemas por el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{c} x-2y+z=0 \\ -2x+5y-z=5 \\ x+y-2z=-3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} 3x+2y+5z=9 \\ 4x+3y-z=-18 \\ -2x+4y-3z=6 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} 3x-y+z=3 \\ -y+z=1 \\ x-2y-z=2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} 3x-7y+2z=0 \\ -2x+2y-z=3 \\ x-5y+z=3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} -x+2y=1 \\ 4x-3y-5z=2 \\ 5x-5y-5z=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y=2 \\ -x-8y+9z=-13 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} 3x-7y+2z=0 \\ -2x+2y-z=3 \\ x-5y+z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} -x+2y=1 \\ 4x-3y-5z=2 \\ x-y-z=5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y=2 \\ -x-8y+9z=3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} x-y+2z+3t=1 \\ 2x+3y-z+t=-2 \\ 3x+2y+z+4t=-1 \\ -2x+2y-4z-6t=-2 \\ 5y-5z-5t=-4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} x+y-z+2t=1 \\ 2x+z+t=0 \\ y-z+3t=1 \\ -x+2y-3z=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} x+y-z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \\ -x+y+4z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} 2x+3y-z=0 \\ x+y+2z=0 \\ -x+2y+2z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} 2x+3y-z=0 \\ x+y+2z=0 \\ -x-7z=0 \end{array}\right\}$$

2. Dependiendo de los valores del parámetro a, discute y resuelve los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{c} x-2y+z=1 \\ 2x+y-3z=2 \\ ax-y-2z=3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} x+y-z=1 \\ 2x-3y+2z=22 \\ x-4y+az=7a \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} x+y-z=1 \\ 3x+3y+az=22 \\ x-4y+3z=0 \end{array}\right\}$$

3. La edad de un padre es doble que la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (*exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos*) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de las edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tiene actualmente el padre?

4. Halla tres números sabiendo que el primero es igual a dos veces el segundo más la mitad del tercero, que la suma del segundo y el tercero es igual al primero más 1, y que si se resta el segundo de la suma del primero con el tercero, el resultado es 5.

5. De un número de tres cifras se sabe que la suma de éstas es 13. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en 198, y si se intercambian las de las unidades y decenas, el número aumenta en 36. Encontrar el número.

6. En un viaje por Francia, Italia y España un turista gastó por hospedaje 2.000, 2.500 y 3.000 ptas. diarias, respectivamente. En comida sus gastos respectivos fueron de 2.500, 1.750 y 3.000 ptas. al día. Además, en concepto de varios gastó 1.000 ptas. diarias en cada país. Si sus gastos parciales fueron de 38.000 ptas. en hospedaje, 37.500 en comida y 15.000 en varios, ¿cuántos días pasó en cada país?

7. El director de un hotel de verano espera a 3 turistas que son diabéticos. Estos turistas precisan de tres tipos de insulina: lenta, semilenta y ultralenta. Las necesidades diarias de cada turista son:

Turista 1: 30 unidades de lenta, 20 u. de semilenta y 10 u. de ultralenta.

Turista 2: 10 u. de lenta, 30 u. de semilenta y 30 u. de ultralenta.

Turista 3: 10 u. de lenta, 10 u. de semilenta y 50 u. de ultralenta.

El director ha comprado las siguientes cantidades de insulina: 700 u. de lenta, 1.050 de semilenta y 2.100 u. de ultralenta.

¿Cuántos días podrán permanecer cada uno de los turistas en el hotel antes de que se agoten las existencias de insulina de las que dispone él mismo? Resolver por el método de Gauss.

8. Para un *"calamitoso"* partido de fútbol, del Real Madrid, se ponen a la venta tres tipos de localidades: Fondo, General y Tribuna. Se sabe que la relación entre los precios de las localidades de Tribuna y General es 19/18 y entre General y Fondo es 6/5. Si al comprar tres localidades, una de cada clase, se pagan en total 13.000 pesetas, ¿cuál es el precio de cada tipo de localidad?

9. Un potente inversionista y honrado contribuyente, decide comprar acciones de tres tipos por un importe total de 3.500 millones de pesetas. Pasado un año, las aciones del primer tipo reparten un dividendo del 6 %, las del segundo tipo del 8 % y las del tercer tipo del 10 %. La cuantía total de la rentabilidad de las acciones es de 300 millones de pesetas.

(a) ¿Cuánto invirtió en cada uno de los tipos de acciones, sabiendo que el total invertido en las acciones del tercer tipo es igual a la suma de los otros dos más 1.000 millones?

(b) Si prescindimos de este último dato, ¿cuál sería la respuesta?

10. Una empresa concede 2.700.000 ptas. para ayudas a 100 estudiantes, hijos de sus empleados. Establece tres cuantías diferentes en función de sus niveles educativos, A, B y C: 40.000 ptas. para los de nivel A, 16.000 para los de nivel B y 20.000 para los de nivel C. Si para el nivel A destina cinco veces más dinero que para el B, ¿cuántos estudiantes hay en cada nivel?

11. Una fábrica, cuya producción tiene gran demanda, abastece a tres mayoristas, A, B y C, quienes han hecho los siguientes pedidos durante un cierto mes: A desea tanto como B y C juntos, y la orden de B es de un 10 % más que la de C. La producción total de la fábrica es de 126 unidades. ¿Cómo debe el fabricante distribuir la producción del mes entre los mayoristas?

12. ***(a)*** Indica tres transformaciones que pueden hacerse en un sistema sin que éste altere su solución.

(b) Pon un ejemplo de sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible y determinado.

(c) Ídem. compatible e indeterminado.

(d) Ídem. incompatible.

(e) ¿Puede un sistema homogéneo ser incompatible?

(f) Si al sistema $\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ y+z=2 \end{array}\right\}$ le añadimos la ecuación $x+z=3$, ¿qué tipo de sistema obtenemos? Razona la respuesta.

13. Un aficionado a la Bolsa invirtió 2.000.000 de pesetas en acciones de tres empresas A, B y C. Al cabo de un año la empresa A pagó el 6 % del dinero invertido, la B el 8 % y la C el 10 %. Como consecuencia de ello, el aficionado a la bolsa cobró un total de 162.400 pesetas. Además en la empresa C invirtió el doble que en la A. Se pide:

(a) Calcular cuánto invirtió en cada empresa. Razona la respuesta.

(b) Prescindiendo del último dato, es decir de que el aficionado invirtió en la empresa C el doble que en la A, ¿cuál sería la respuesta?

14. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula el rango de A.

(b) Discutir si existe solución y resolver, caso de que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Cambiando una sola ecuación, convertir el sistema de ecuaciones lineales del apartado

(b) en un sistema que tenga infinitas soluciones y calcúlalas.

15. Escribir un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que sea incompatible y comprobar la incompatibilidad. Interpretar geométricamente este sistema.

16. Tres personas A, B y C le van a hacer un regalo a un amigo común. El regalo les cuesta 8.600 pesetas. Como no todos disponen del mismo dinero deciden pagar de la siguiente manera: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada 2 pesetas que paga B, C paga 3 pesetas. Se pide:

(a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita determinar cuánto paga cada persona.

(a) Resolver el sistema por el método de Gauss.

17. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix}$ siendo *m* un parámetro real. Se pide:

(a) Calcular el rango de A según los valores del parámetro *m*.

(b) Considerar el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Discutir si existe solución según los valores del parámetro *m*. En caso afirmativo, resolver el sistema.

(c) Para *m* = 7, considerar el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Discutir si existe solución.

18. Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 6 \\ x - y + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ Se pide:

(a) Discutir si existe solución y, en caso afirmativo, resolverlo.

(b) Modificando una sola de las tres ecuaciones transformar el sistema dado en un sistema compatible e indeterminado y resolverlo. Razonar la respuesta.

19 ¿Para qué valores de *a* y *b* será compatible este sistema? $\begin{cases} x+y+z=a \\ x-y-z=b \end{cases}$ ¿Será determinado?

20. Si tenemos un sistema compatible indeterminado de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿se puede conseguir un sistema incompatible añadiendo una tercera ecuación?

21. ***(a)*** Forma un sistema de dos ecuaciones que tenga como solución $x=2, \quad y=-1, \quad z=3$. Encuentra todas sus soluciones.

(b) Forma un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuyos términos independientes sean todos cero, de forma que tenga como solución $(2,-1,3)$. Resuélvelo.

22. Si a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas incompatible le agregamos una tercera ecuación, ¿podríamos lograr que fuera compatible indeterminado? ¿Y determinado? Justifica las respuestas.

23. ¿Es posible convertir este sistema en compatible indeterminado cambiando un signo?

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

24. ¿Existe algún valor de *k* para el cual tenga infinitas soluciones el siguiente sistema?

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ kx+z=0 \end{cases}$$

25. ¿Para qué valores de *a* el siguiente sistema es incompatible? ¿Puede tener infinitas soluciones? $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+2y+az=5 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$

26. ¿Es posible transformar el siguiente sistema en indeterminado cambiando sólo la tercera ecuación? Razona la respuesta y pon un ejemplo. $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=3 \\ x-y-z=5 \end{cases}$

27. Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y en cada caso pon un ejemplo o un contraejemplo:

I) En un sistema compatible indeterminado se puede eliminar una ecuación y obtener un sistema equivalente.

II) Un sistema compatible indeterminado tiene siempre dos ecuaciones iguales.

III) De un sistema incompatible podemos extraer otro que sea compatible eliminando ecuaciones

28. Considera el sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$ ***(a)*** Añádele una ecuación de modo que sea incompatible e interpreta geométricamente esta situación. ***(b)*** ¿Se puede añadir una ecuación de modo que el sistema sea compatible indeterminado?

29. Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, puede ser compatible determinado? Pon ejemplos aclaratorios.

30. Se considera un número de tres cifras del que se sabe que la suma de sus tres cifras es 12, el doble de la cifra de las decenas es igual a la suma de las otras dos cifras y, por último, se sabe que la cifra de las centenas es tres más la mitad de la cifra de las decenas. Se pide:

(a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales con el que se determine dicho número

(b) Resolve, utilizando el método de Gauss, el sistema de ecuaciones lineales planteado en el apartado (a).

(c) ¿Cuál es la solución del problema si no se considera la última condición? Razona la respuesta.