LA DERIVADA

La derivada es uno de los conceptos centrales en la rama de las Matemáticas llamada cálculo y tiene una variedad de aplicaciones que incluyen el esbozo de curvas, la optimización de funciones y el análisis de ritmos de cambio.

El desarrollo del cálculo surgió de cuatro grandes problemas que ocupaban a los matemáticos europeos en el siglo XVII:

1. *El problema de la tangente.*
2. *El problema de la velocidad y aceleración.*
3. *El problema de máximos y mínimos.*
4. *El problema del área.*

El paso decisivo para la resolución de dichos problemas lo dieron Newton y Leibnitz al sentar las bases del cálculo diferencial e integral. La relación que permitió conectar los problemas de la mecánica con los de geometría, fue descubierta gracias a la posibilidad de hacer una representación gráfica de la dependencia de una variable respecto de otra o, en otras palabras, de una función. Con la ayuda de esta representación gráfica es fácil formular la relación antes mencionada entre los problemas de la mecánica y la geometría y describir así el contenido general de estos dos tipos de cálculo.

El cálculo diferencial es, básicamente, un método para encontrar la velocidad de un movimiento cuando se conoce la distancia recorrida en un tiempo dado. Este problema se resuelve por "derivación" y es completamente equivalente al problema de dibujar una tangente a la curva que representa la dependencia de la distancia respecto del tiempo. La velocidad en el instante t es igual a la pendiente de la tangente a la curva en el punto de abscisa t.

1. Tasa de variación media de una función

➢ 1.1 Variación de una función

En muchos problemas de contexto real, al estudiar una función lo que interesa son los cambios que pueden observarse en ella. Así, por ejemplo, en el caso del estudio de la presión atmosférica puede importar más lo que ha variado la presión que el valor de la misma en un determinado momento; en una gráfica posición-tiempo interesa la distancia recorrida; en el estudio de la dilatación de una barra se prestará más atención a lo que se ha alargado que a su longitud; si se estudia la evolución de los precios de un producto se centrará más el interés en los cambios que en los valores de los precios. Todo ello nos induce a tratar de la variación de una función entre dos valores de la variable independiente x_1 y x_2.

□ ***DEFINICIÓN :***

Sea y = f(x) una función definida en un intervalo (a,b) *y* $x_1, x_2 \in (a,b)$ *siendo* $x_1 < x_2$.

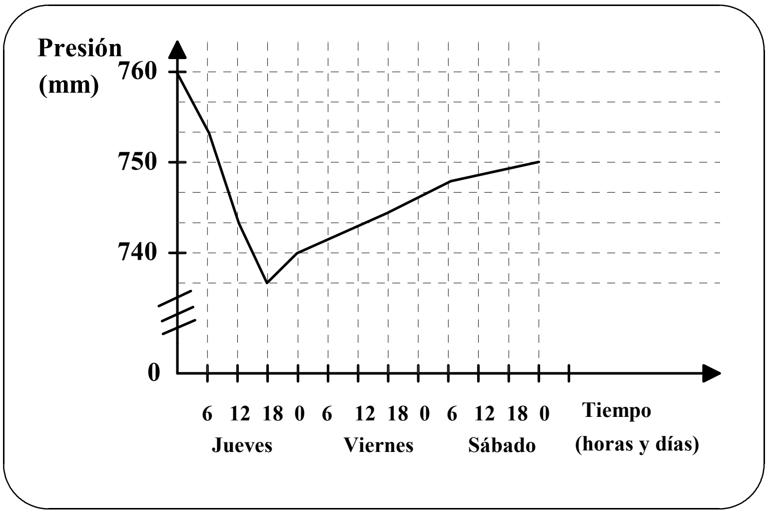
Se llama ***incremento de la variable independiente*** *en el intervalo* $[x_1, x_2]$ *a la diferencia* $x_2 - x_1$. *Se simboliza por* Δx *o por h:*

$$\Delta x = h = x_2 - x_1$$

Se llama ***incremento de la función o variación de la función*** *$y = f(x)$ en dicho intervalo a la diferencia $f(x_2) - f(x_1)$. Se simboliza por Δf o por Δy:*

$$\Delta f = \Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

◆ **ACTIVIDAD 1:** La siguiente gráfica representa la presión en función del tiempo.



(a) ¿Cuál ha sido la variación de presión entre las 6 h y las 12 h del jueves?

(b) ¿Y entre las 24 h del jueves y las 24 h del sábado?

(c) ¿Cómo interpretas que los dos valores absolutos sean los mismos?

◆ **ACTIVIDAD 2:** La siguiente tabla nos da la posición, medida desde su casa, de una bicicleta en función del tiempo.

Tiempo (horas, min.)	*10 h*	*10 h 15 m*	*10 h 30 m*	*10 h 45 m*	*11 h*	*11 h 15 m*	*11 h 30 m*
Posición (Km)	*25*	*32*	*40*	*46*	*53*	*60*	*68*

(a) ¿Qué distancia ha recorrido la bicicleta entre las *10 h 15 m* y las *11 h*?

(b) ¿Y entre las *10 h 30 m* y las *11 h 30 m*?

➢ 1.2 Tasa de variación media de una función

Si recordamos la *Actividad 1*, relativa a las presiones, cuando se hacen predicciones de buen o mal tiempo, lo que importa no son sólo las variaciones de la presión sino las variaciones en el tiempo, es decir, la razón entre la variación de la presión y el tiempo de duración de la misma. Una variación en la presión atmosférica, pongamos por caso, de *-10* *mm.* no tiene ninguna consecuencia si se realiza a lo largo de 2 días, pero sí que la tiene si se realiza en 5 horas. En general, se suele considerar que:

- Una caída de la presión atmosférica que dure más de 3 horas y que sea en media superior a 1,3 mm. por hora, anuncia mal tiempo (si ya lo hace, lo sigue haciendo).
- Un aumento de la presión atmosférica que dure más de 3 horas y que sea en media superior a 1,3 mm. por hora, anuncia buen tiempo (si ya lo hace, lo sigue haciendo).
- Una presión estable no implica cambio de tiempo.

Así pues, si la variación de -10 mm. tiene lugar a lo largo de 5 horas, la variación media por hora es de

$$\frac{-10}{5} = -2 \text{ mm/h},$$

es decir, que se puede predecir mal tiempo. En cambio si la variación se ha producido en 2 días, resulta una variación media por hora de

$$\frac{-10}{48} = -0{,}2 \text{ mm/h}$$

que indica presión estable.

Por consiguiente, lo que interesa en este ejemplo es la variación media por hora de la presión: lo llamaremos tasa de variación media de la presión atmosférica y nos indica la rapidez con que cambia la presión.

□ ***DEFINICIÓN:***

La tasa de variación media *de una función y= f(x) en el intervalo* $[x_1, x_2]$, *es el cociente entre el incremento de la función* Δf *y el correspondiente incremento de la variable independiente* Δx:

$$t_m[x_1, x_2] = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si en lugar de considerar un intervalo $[x_1, x_2]$ se toma el intervalo $[x_1, x_1 + h]$, con $h \neq 0$, entonces podemos dar la siguiente definición de tasa de variación media.

□ ***DEFINICIÓN:***

La ***tasa de variación media*** *de una función y = f(x) en el intervalo* $[x_1, x_1 + h]$, *con* $h \neq 0$, *viene dada por:*

$$t_m[x_1, x_1 + h] = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

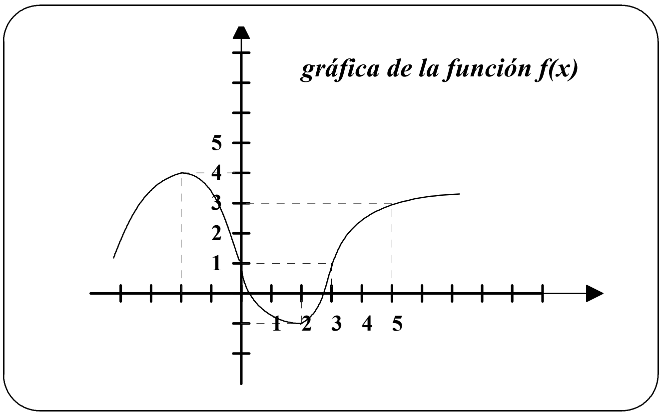
◆ **ACTIVIDAD 3:** Coste de la vida según los datos referidos al año 1.976. En este ejemplo nos va a interesar saber la rapidez con que se ha producido una variación. Si nos fijamos, por ejemplo, en el coste de la vida según los datos referidos al año 1.976, lo que entonces se podía comprar por 100 ptas. costaba en los años sucesivos las cantidades que se indican en la tabla.

Año	*x*	*1.977*	*1.978*	*1.979*	*1.980*	*1.981*	*1.982*	*1.983*	*1.984*	*1.985*	*1.986*	*1.987*	*1.988*	*1.989*	*1.990*	*1.991*	*1.992*
I.P.C.	*y*	*124,5*	*149,1*	*172,5*	*199,3*	*228,4*	*261,3*	*293,1*	*326*	*354,6*	*385,8*	*406,2*	*425,6*	*453,6*	*483,9*	*512,4*	*542,6*

donde el I.P.C. es el índice de precios al consumo.

(a) ¿Cuál es la tasa media de crecimiento del I.P.C. en cada uno de los años que aparecen en la tabla? ¿Cuál es la tasa media anual en el periodo 1.976-1.984? ¿Cuál es la tasa media anual en el periodo 1.985-1.992?

(b) ¿Cual ha sido el tanto por ciento del crecimiento del coste de la vida en cada uno de los



años? ¿Cuál ha sido en el periodo 1.976-1.984? ¿Cuál ha sido en el periodo 1.985-1.992?

(c) Una persona que al comenzar el año 1976 ganase 50.000 ptas. al mes, ¿cuánto debería ganar al comenzar el año 1.984 para compensar el aumento del coste de la vida? ¿Cuánto al comenzar el año 1.993?

◆ **ACTIVIDAD 4:** Dada la gráfica de la función *y = f(x),* calcula la tasa media de variación en los intervalos: $[-2,3]$, $[-2,2]$, $[2,3]$, $[3,5]$.

❑ *EJEMPLO 1:*

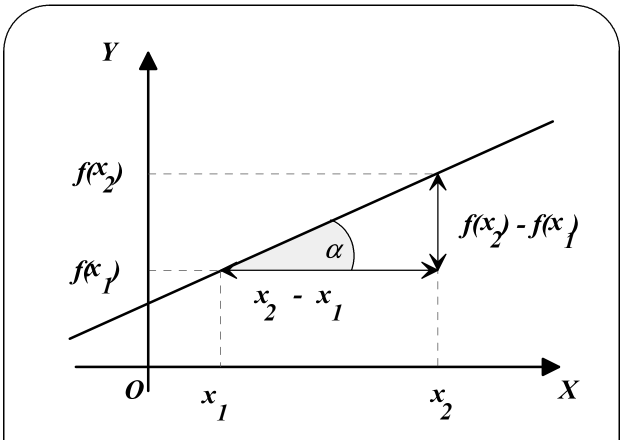


Figura 1.1

Determinaremos la tasa de variación media de la función afín: $f(x) = mx + b$

Recuerda que la gráfica de estas funciones es una linea recta (no paralela al eje de ordenadas), siendo *m* la ***pendiente*** de la recta y *b* su ***ordenada en el origen.***

También sabemo*s* que la recta forma con la dirección positiva del eje de abcisas un ángulo a que recibe el nombre de ***inclinación*** de la recta, verificándose

$$\text{tag } a = m$$

Calculemos la tasa de variación media en el intervalo $[x_1, x_2]$ de la función *f(x) = mx + b* representada en la figura 1.1.

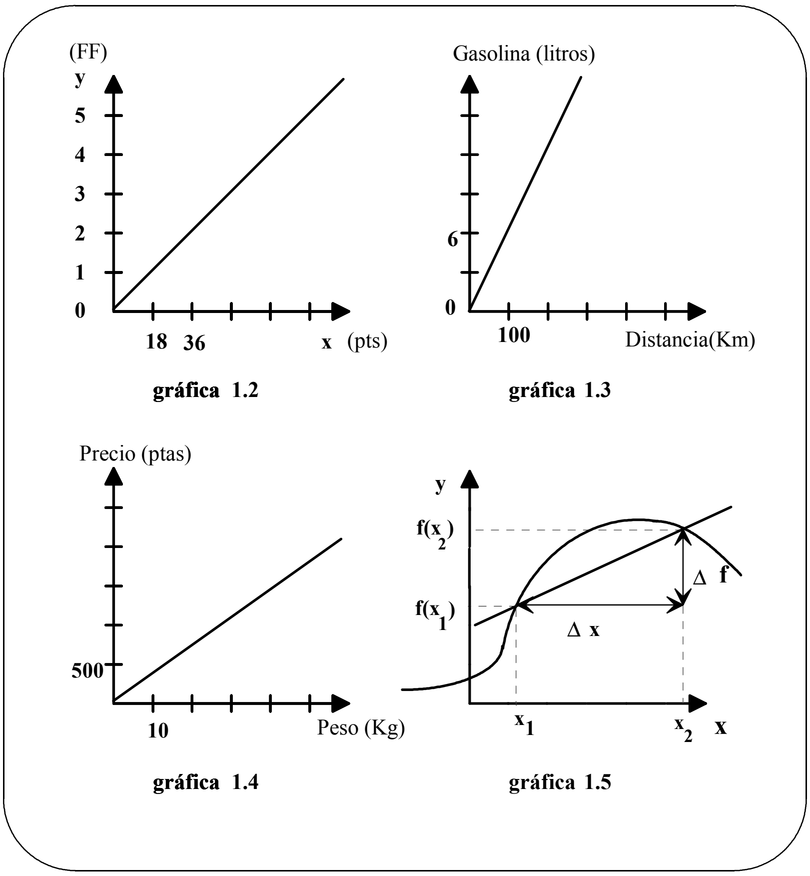
$$m = tag \quad a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$t_m[x_2, x_1] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(mx_2+b)-(mx_1+b)}{x_2-x_1} = \frac{mx_2-mx_1}{x_2-x_1} = \frac{m(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = m$$

Observamos que ***la tasa de variación media de la función afín*** *no depende del intervalo elegido, sino que es* ***constante*** *e igual a la* ***pendiente de la recta*** *representativa de dicha función.*

➢ 1.3 Tasa de variación media y pendiente de una recta

Existen muchos ejemplos de la vida real en los que la pendiente de una recta tiene el significado de una tasa de variación. Así, por ejemplo:



◆ La tasa de cambio de pesetas a francos es la pendiente de la recta que representa la relación de cuántos francos y se pueden obtener por x pesetas. Las unidades se expresarán en francos/pesetas. *(gráfica 1.2)*

◆ La tasa de consumo de gasolina de un coche es la pendiente de la recta que representa los litros de gasolina por la distancia recorrida. Las unidades se expresarán en litros/Km. *(gráfica 1.3)*

◆ El precio de muchos productos depende de el peso. El precio por kilogramo, expresado en pesetas/Kg es también una tasa de variación, y es la pendiente de la recta que representa cada precio en función del peso correspondiente. *(gráfica 1.4)*

En el caso general, dada una función *y = f(x)* cualquiera, se puede comprobar fácilmente que ***la tasa de variación media de la función f(x)*** en el intervalo $[x_1, x_2]$, coincide con la ***pendiente de la recta secante a la gráfica de f determinada por los puntos de abscisas*** $\boldsymbol{x_1}$ ***y*** $\boldsymbol{x_2}$. *(gráfica 1.5)*

2. La derivada y el problema de la tangente

➢ 2.1 El problema de la tangente

Un problema típico para el que puede ser aplicado el Cálculo diferencial es el de maximización de una función. Por ejemplo, supongamos que el beneficio mensual de un fabricante en la venta de radios viene dado por la función $B(x) = 400(15 - x)(x - 2)$u.m. (*unidades monetarias*), cuando las radios se venden a *x* u.m. cada una. La gráfica de esta función beneficio, *Figura 2.1,* sugiere que hay un precio óptimo de venta *x* con el cual el beneficio del fabricante será máximo. En términos geométricos, el precio óptimo es la abscisa *x* del vértice de la parábola que representa a la función *B(x)*. En este ejemplo, el vértice puede ser caracterizado en términos de rectas que son **tangentes** a la gráfica. En particular, el vértice es el único punto de la gráfica en el cual la tangente es horizontal; esto es, en el que la pendiente de la tangente es cero.

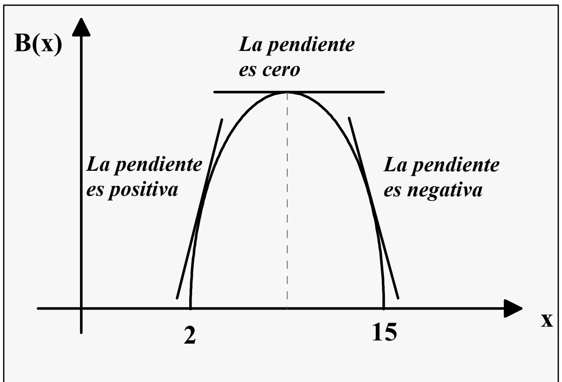
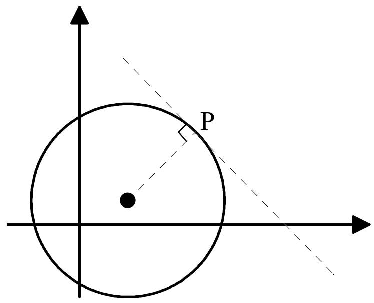
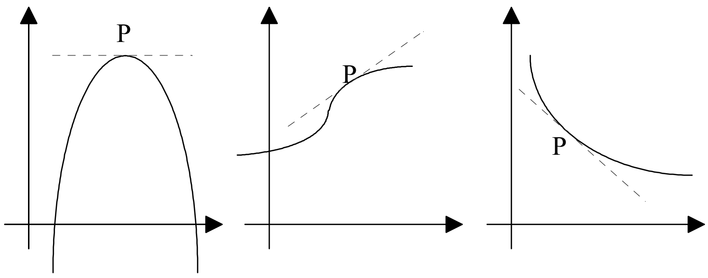


Figura 2.1



Recta tangente a un círculo

Figura 2. 2



Recta tangente a una curva en un punto

Figura 2. 3

Ahora bien, ¿qué queremos decir cuando hablamos de que una recta es tangente a una curva en un punto? Para un círculo, podemos caracterizar la recta tangente en un punto P como la recta perpendicular a la recta radial que pasa por P. (*véase figura 2.2*). Sin embargo, para una curva arbitraria el problema es más difícil. Así, ¿cómo definir las rectas tangentes que muestra la *figura 2.3*?

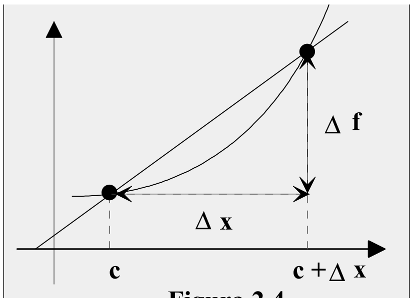


Figura 2.4

Esencialmente, el problema de hallar la recta tangente en un punto P se reduce al de hallar su **pendiente**. Y ésta puede aproximarse mediante rectas que pasen por P y por otro punto de la curva (*Figura 2.4*), a las que llamamos **rectas secantes.** Si $(c,\ f(c))$ es el punto de tangencia y $(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$ es otro punto de la gráfica de f próximo al de tangencia, la pendiente de la recta secante que pasa por ambos puntos es

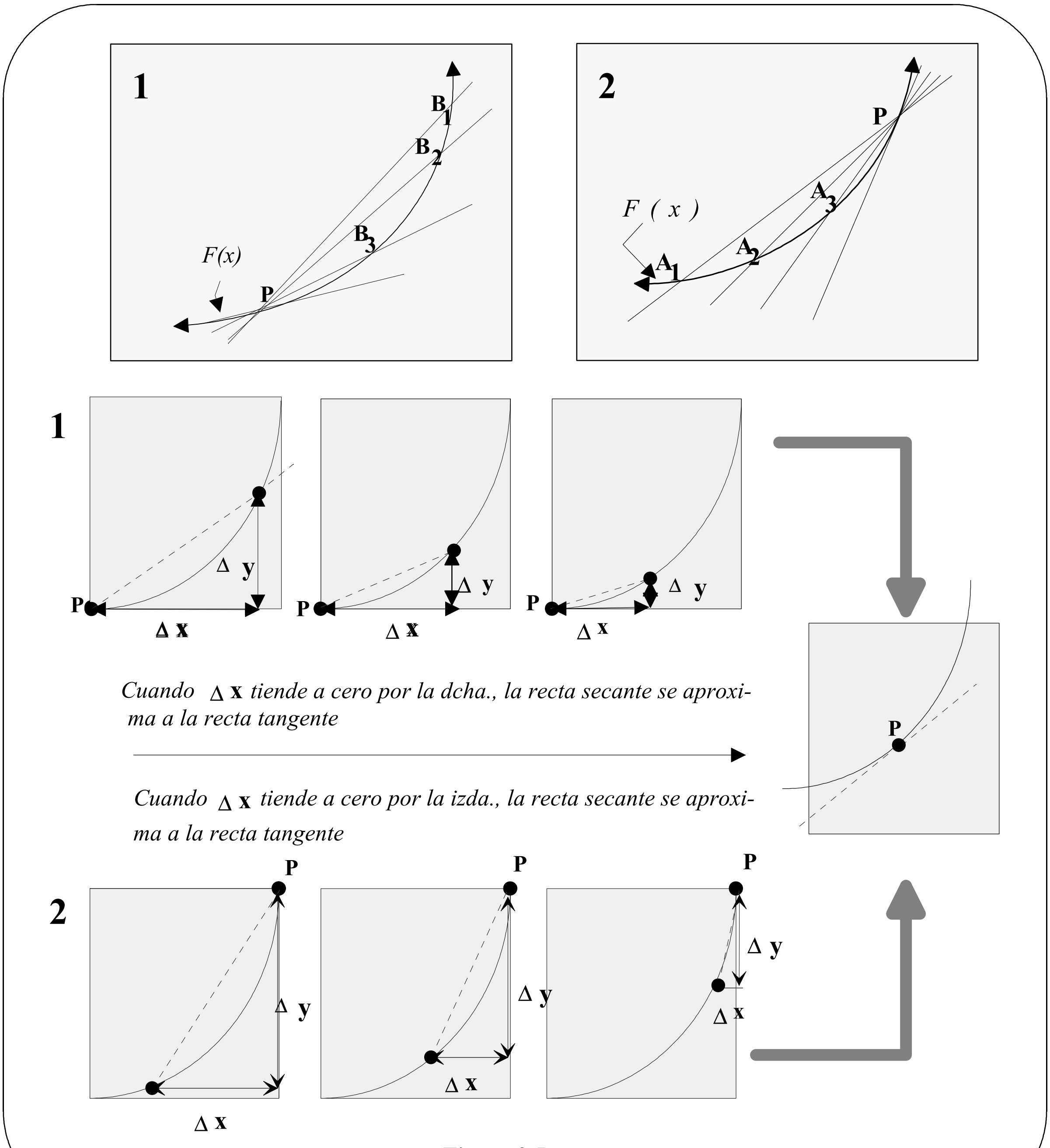


Figura 2.5

$$m_{\sec} = \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{c+\Delta x-c} = \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (*)$$

La fórmula (*) es la **tasa de variación media de *f*** en el intervalo $[c, c+\Delta x]$.

Lo bonito de este proceso es que obtenemos cada vez mejores aproximaciones a la pendiente de la tangente sin más que acercar el otro punto al de tangencia como se ve en la *figura 2.5*.

Tomando límites definiremos la pendiente de la tangente como límite de las pendientes de las rectas secantes.

❑ ***DEFINICIÓN:***

Si f está definida en un intervalo conteniendo a "c" y existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = m \in R$$

*llamaremos a la recta que pasa por P(c, f(c)) con pendiente "m" la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto P.*

❑ ***EJEMPLO2:***

Hallaremos la pendiente de la recta tangente a $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa 1.

SOLUCIÓN: Primeramente obtendremos una estimación de la pendiente calculando las pendientes de las rectas secantes.

$x + \Delta x$	$f(x + \Delta x)$	$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(1)$	Δx	$\Delta f / \Delta x$
2	4	3	1	3
1'5	2'25	1'25	0'5	2'5
1'1	1'21	0'21	0'1	2'1
1'01	1'0201	0'0201	0'01	2'01
1'001	1'002001	0'002001	0'001	2'001
1'0001	1'00020001	0'00020001	0'0001	2'0001

$x + \Delta x$	$f(x + \Delta x)$	$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(1)$	Δx	$\Delta f / \Delta x$
0	0	-1	-1	1
0'5	0'25	-0'75	-0'5	3
0'9	0'81	-0'19	-0'1	1'9
0'99	0'9801	-0'0199	-0'01	1'99
0'999	0'998001	-0'001999	-0'001	1'999
0'9999	0'99980001	-0'00019999	-0'0001	1'9999

Si observas las últimas columnas de las dos tablas anteriores, puedes estimar que si $\Delta x \to 0$ entonces $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 2$. Comprobaremos que esta estimación es válida efectuando el proceso de paso al límite. En efecto:

- $\Delta f = f(\Delta x + 1) - f(1) = (\Delta x + 1)^2 - 1 = (\Delta x)^2 + 2\Delta x$
- $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = \Delta x + 2$
- $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2) = 2$ =pendiente de la tangente.

□ ***EJEMPLO3:***

Obtén una fórmula expresando la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + x$ ***como una función de la abscisa x del punto de tangencia.***

SOLUCIÓN: Determinamos, en primer lugar, la pendiente de la secante a la gráfica en los puntos de abscisa x y $x + \Delta x$.

- $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + x + \Delta x - (x^2 - x) = (\Delta x)^2 + 2x\Delta x + \Delta x$
- $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 + 2x\Delta x + \Delta x}{\Delta x} = \Delta x + 2x + 1$ =pendiente de la secante.

Calculando ahora el límite de la tasa de variación media obtenemos:

- $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2x + 1) = 2x + 1$= pendiente de la recta tangente a *f* en el punto (*x, f(x)*).

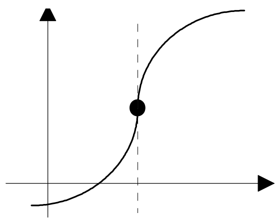


Figura 2.6

La definición que hemos dado de tangente sólo se aplica a rectas de pendiente definida, no al caso de la *figura 2.6,* con una tangente vertical. Para cubrir este caso, damos la siguiente definición.

□ ***DEFINICIÓN:***

Si una función es continua en "c" y $\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \right| = \infty$ *la recta vertical que pasa por (c,f(c)) es una* ***recta tangente vertical*** *a la gráfica de f.*

➢ 2.2 Tasa de variación instantánea de una función

Partiendo de la idea de tasa media de variación o de pendiente de una recta secante y del concepto de recta tangente en un punto como posición límite de las secantes en dicho punto, se puede abordar *el tema de cómo medir la variación de una función en un punto.*

□ ***DEFINICIÓN:***

Si y = f(x) es una función definida en $[x_1, x_2]$ *y* $c \in (x_1, x_2)$*, se llama* ***derivada*** *de f en el punto c, y se suele representar por* $f'(c)$*, al límite:*

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

si existe y es finito.

La derivada de una función f en un punto c, se llama también ***tasa de variación instantánea*** *de f en c.*

La derivada de una función en un punto *c* es, pues, el límite de la tasa de variación media de *f* en el intervalo $[c, c+\Delta x]$ cuando Δx tiende a cero.

- Por tanto: ***La derivada de una función f en un punto de abscisa c es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.***
- Si una función *f* admite derivada en un punto *c*, se dice que es ***derivable*** en *c*.
- Cuando una función *f* admite derivada en todos los puntos de un intervalo, se dice que es ***derivable*** en dicho intervalo.

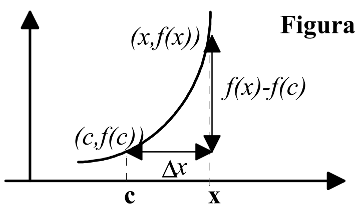


Figura 2.7

En la *figura 2.7,* vemos que si $x = c + \Delta x$, entonces $x \to c$ cuando $\Delta x \to 0$. Así que si sustituimos $c + \Delta x$ por x podemos dar la siguiente definición alternativa de derivada:

☐ *OTRA DEFINICIÓN:*

Si y = f(x) es una función definida en $[x_1, x_2]$ y $c \in (x_1, x_2)$, *se llama* ***derivada*** *de f en el punto c al límite:*

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

si existe y es finito.

NÓTESE que la existencia de límite en esta forma alternativa exige la igualdad de los límites laterales

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad y \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Por conveniencia, citaremos estos límites laterales como las **derivadas laterales por la izquierda y por la derecha**, respectivamente. Pero téngase presente que si dichos límites laterales no son iguales en *c*, la derivada no existe en *c*.

➢ 2.3 Derivabilidad y continuidad

Los tres próximos ejemplos se refieren a la relación entre derivabilidad y continuidad.

❑ ***EJEMPLO4:***

Una función con derivadas laterales distintas: La función $f(x) = |x|$ (*Figura 2.8*) es continua en $x = 0$, pero los límites laterales

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

no son iguales, luego f no es derivable en el punto de abscisa x = 0.

❑ ***EJEMPLO 5:***

Una función con tangente vertical: La función $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ es continua en $x = 0$ (*Figura 2.9*) pero como

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

se sigue que la tangente es vertical en $x = 0$. Luego f no es derivable en $x = 0$.

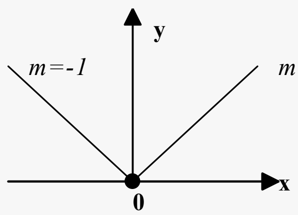


Figura 2.8

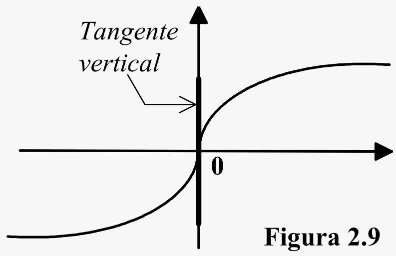


Figura 2.9

❑ ***EJEMPLO 6:***

***Una función discontinua**:* La función $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ -x^2+4, & x\geq 0 \end{cases}$ no es continua ni derivable en $x = 0$. En la *Figura 2.10* vemos que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \neq f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$, lo cual implica que f no es continua en $x = 0$. Además la derivada por la izquierda no existe, porque

$$\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{(\Delta x)^2+1-4}{\Delta x} = \infty$$

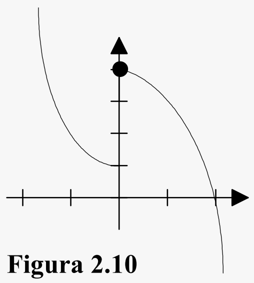


Figura 2.10

Luego f no es derivable en $x = 0$. Nótese en la figura que aunque f produce un límite infinito no tiene tangente vertical, lo cual no contradice la definición de recta vertical ya que f no es continua en $x = 0$.

De estos tres ejemplos recogemos algunas *causas que destruyen la derivabilidad:*

1. Desvíos bruscos (*Ejemplo 4*).
2. Tangente vertical (*Ejemplo 5*).
3. Discontinuidades (*Ejemplo 6*).

Así pues, la continuidad no es suficiente para garantizar la derivabilidad, pero por otra parte las discontinuidades la destruyen. Esto lleva al siguiente resultado.

□ ***TEOREMA:***

Si f es derivable en x = c, entonces f es continua en dicho punto.

DEMOSTRACIÓN:

f derivable en c

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \in R \overset{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x\to c} [f(x)-f(c)] = 0$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \lim_{x\to c} f(x) = f(c) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \textit{f es continua en c.}$$

(1): Definición de derivada.
(2): Propiedades de los límites.
(3): Propiedades de los límites.
(4): Definición de continuidad.

3. Función derivada. Derivadas sucesivas

En los epígrafes anteriores hemos estudiado la derivada de una función en un punto; por lo que si, para una función determinada, hubiera que hallar la derivada en dos o más puntos, será necesario repetir los cálculos en cada caso. Es decir, para cada punto c, habrá que calcular:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

Este problema podría resolverse si, dada la función $y = f(x)$, se hallara una nueva función $y' = f'(x)$, obtenida de $y = f(x)$, tal que a cada valor de x le correspondiera la derivada $f'(x)$.

De este modo, para calcular la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto cualquiera c, bastaría con hallar la imagen de c mediante la función f'; es decir, habría que calcular $f'(c)$.

☐ *DEFINICIÓN:*

*Sea y = f(x) una función derivable en un intervalo I. La función f' tal que a cada valor de $x \in I$ le corresponde la derivada f'(x) recibe el nombre de **función derivada** de f.*

Simbólicamente:

$$\begin{aligned} f' : I &\to R \\ x &\to f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

La función derivada se simboliza también mediante y' o Df.

Para la función derivada de $y = f(x)$ se usa también la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{df}{dx}$, que se lee " derivada de y respecto de x" o "derivada de f respecto de x".

☐ *EJEMPLO7:*

Calcular la función derivada de la función $f(x) = x^2 - x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)-(x^2-x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 1) = 2x - 1$$

Si una función $y = f(x)$ tiene derivada $y' = f'(x)$, puede suceder que esta última función sea derivable, es decir, que exista su función derivada. Esta nueva función se llama ***derivada segunda*** de la función $y = f(x)$. Se indica con la notación:

$$y'', \quad f''(x), \quad D^2 f, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ o } \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Derivando sucesivamente se obtienen las ***derivadas tercera, cuarta, ... , n-ésima*** de una función. Se indican con la notación:

$$y''', \quad f'''(x), \quad D^3 f, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} \text{ o } \frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$y^{(4)}, \quad f^{(4)}(x), \quad D^4 f, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} \text{ o } \frac{d^4 f}{dx^4}$$

....

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad D^n f, \quad \frac{d^n y}{dx^n} \text{ o } \frac{d^n f}{dx^n}$$

☐ *EJEMPLO 8:*

Hallar las derivadas sucesivas de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

$$f'(x)=4x-3 \quad ; \quad f''(x)=4 \quad ; \quad f'''(x)=0$$

Las derivadas sucesivas a partir de la tercera son la función nula.

4. Derivada de las funciones elementales

➢ 4.1 Derivada de la función constante

Si k es un número real, la derivada de la función constante f(x) = k es: f'(x) = 0

En efecto: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0$

➢ 4.2 Derivada de la función identidad

La derivada de la función identidad f(x) = x es: f'(x) = 1

En efecto: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=1$

➢ 4.3 Derivada de la función potencial

Si n es un número real, admitiremos sin demostración que:

La derivada de la función potencial $f(x)=x^n$ *es :* $f'(x)=n.x^{n-1}$

❑ ***EJEMPLO 9:***

$$f(x)=x^4 \Rightarrow \quad f'(x)=4.x^3$$

$$f(x)=\frac{1}{x^3}=x^{-3} \Rightarrow \quad f'(x)=(-3).x^{-4}=\frac{-3}{x^4}$$

➢ 4.4 Derivada de la función raíz cuadrada

La derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ *es* $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

En efecto: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

➢ 4.5 Derivada de la función exponencial

Admitiremos sin demostración que:

La derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$ *es:* $f'(x) = a^x \cdot \ln a$

CASO PARTICULAR:

La derivada de la función exponencial $f(x) = e^x$ *es:* $f'(x) = e^x$

➢ 4.6 Derivada de la función logarítmica

Admitiremos sin demostración que:

La derivada de la función logarítmica $f(x) = log_a x$ *es:* $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$

CASO PARTICULAR:

La derivada de la función logarítmica $f(x) = \ln x$ *es:* $f'(x) = \frac{1}{x}$

5. Reglas de derivación

Las llamadas ***reglas de derivación*** son fórmulas que permiten hallar la función derivada de una función *y = f(x)* sin necesidad de aplicar la definición:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La demostración de las reglas de derivación se realiza aplicando la definición de derivada. Sólo demostraremos algunas de ellas, omitiendo la demostración de otras por su complejidad.

➢ 5.1 Derivada de la función suma

La derivada de la función s(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) es: s'(x) = f'(x)+g'(x)

En efecto:

$$s'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

❑ ***EJEMPLO 10:***

$$f(x) = x^3 + x - 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 1$$

➢ 5.2 Derivada de la función producto

La derivada de la función producto p(x) = f(x).g(x) es: p'(x) = f'(x).g'(x)

En efecto:

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$\overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)\overbrace{-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)}-f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$\overset{(2)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{[g(x+h)-g(x)]\cdot f(x)}{h} =$$

$$\overset{(3)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \overset{(4)}{=}$$

$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

(1) Suma y resta de una misma cantidad señalada bajo la llave.

(2) y (3) Propiedades de los límites.

(4) Las funciones f y g son derivables, por tanto son continuas y $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, $\lim_{h\to 0} f(x) = f(x)$

CASO PARTICULAR:

La derivada de la función p(x) = k.f(x), siendo k un número real, es: p'(x) = k.f'(x)

❑ ***EJEMPLO 11:***

(a) $f(x) = (3x-2x^2)\cdot(5+4x) \Rightarrow \quad f'(x) = \overbrace{(3-4x)}^{\text{derivada del primero}} \cdot \overbrace{(5+4x)}^{\text{segundo}} + \overbrace{(3x-2x^2)}^{\text{primero}} \cdot \overbrace{(4)}^{\text{derivada del segundo}} =$

$= -24x^2 + 4x + 15$

(b) $f(x) = 4\cdot x^5 \Rightarrow \quad f'(x) = 4\cdot 5\cdot x^4 = 20\cdot x^4$

➢ 5.3 Derivada de la función cociente

La derivada de la función cociente $c(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *es:*

$$c'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

En efecto:

$$c'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$\stackrel{(1)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x) \overbrace{- f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x)} - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{[g(x)]^2} \cdot \lim_{h\to 0} \left[\frac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x)}{h} - \frac{[g(x+h)-g(x)\cdot f(x)]}{h} \right] =$$

$$\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{[g(x)]^2} \cdot \left[\lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{[g(x+h)-g(x)]\cdot f(x)}{h} \right] =$$

$$\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{[g(x)]^2} \cdot \left[\lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{[g(x+h)-g(x)]}{h} \right] =$$

$$\stackrel{(5)}{=} \frac{1}{[g(x)]^2} \cdot [f'(x).g(x) - f(x).g'(x)] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

(1) Suma y resta de una misma cantidad señalada con una llave

(2), (3) y (4) Propiedades de los límites.

(2) y (4) f y g derivables y por lo tanto continuas

(4) Definición de derivada.

❑ ***EJEMPLO 12:***

$$f(x) = \frac{2x^2-4x+3}{2-3x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(4x-4)\cdot(2-3x)-(-3)\cdot(2x^2-4x+3)}{(2-3x)^2} = \frac{-6x^2+8x+1}{(2-3x)^2}$$

➢ 5.4 Derivada de la función compuesta

Aplicando las reglas de derivación estudiadas, se puede hallar la función derivada de las funciones elementales más usuales, pero no es posible obtener la función derivada de funciones como:

$$y = \ln(x^2+5), \quad y = \sqrt{x^2+1}\,, \quad y = (3x+2)^5, \text{ etc.}$$

Las funciones de este tipo son el resultado de la composición de varias funciones. Así, por ejemplo, las funciones anteriores

$y = \ln(x^2+5)$ es del tipo $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, siendo $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2+5$

$y = \sqrt{x^2+1}$ es del tipo $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, siendo $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2+1$

$y = (3x+2)^5$ es del tipo $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, siendo $f(x) = x^5$ y $g(x) = 3x+2$

El cálculo de estas derivadas se realiza aplicando la siguiente regla de derivación, que admitimos sin demostración:

Si y = $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *es una función derivable de u y u = g(x) es una función derivable de x, entonces y = f(g(x)) es función derivable de x, con*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o equivalente,

$$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esta regla de derivación se conoce con el nombre de ***regla de la cadena.***

Al aplicar la regla de la cadena resulta útil pensar en $(f \circ g)$ como constituida por dos partes, una *interior* y otra *exterior*, como sigue:

$$y = f \underbrace{(g(x))}_{\substack{u = g(x) \\ interior}} = \overbrace{f(u)}^{exterior}$$

❑ ***EJEMPLO 13:***

$$y = \ln \underbrace{(x^2+5)}_{u} = \ln u \quad \Rightarrow \quad y' = \underbrace{\frac{1}{u}}_{\frac{dy}{du}} \cdot \underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} = \frac{2x}{x^2+5}$$

$$y = \sqrt{\underbrace{x^2+1}_{u}} = \sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad y' = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{u}}}_{\frac{dy}{du}} \cdot \underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y = \underbrace{(3x+2)}_{u}{}^5 = u^5 \quad \Rightarrow \quad y' = \underbrace{(5u^4)}_{\frac{dy}{du}} \cdot \underbrace{(3)}_{\frac{du}{dx}} = 15 \cdot (3x+2)^4$$

6. Razón de cambio y análisis marginal

En este epígrafe veremos cómo la derivada puede ser interpretada como una ***razón de cambio***. Vista de este modo, una derivada puede representar cantidades tales como el ritmo al que crece una población, un coste marginal de un fabricante, la velocidad de un objeto que se mueve, el ritmo de inflación o el ritmo al que los recursos naturales están siendo agotados.

Hemos podido percibir la conexión entre derivada y razón de cambio, ya que la derivada de una función en un punto es la pendiente de su recta tangente en dicho punto, y la pendiente de cualquier recta es la razón a la que se está elevando o cayendo. El propósito de este epígrafe es hacer esta conexión más precisa. Analicemos una situación práctica familiar que servirá como modelo para la discusión general.

➢ 6.1 Velocidad media e instantánea

Si un móvil se desplaza por una recta, hablamos de ***movimiento rectilíneo*** y se puede usar una recta horizontal (o vertical) con un origen determinado como trayectoria del móvil. El movimiento hacia la derecha se considera en ***sentido positivo*** y hacia la izquierda ***negativo.***

La función *s(t)* que da la posición (respecto al origen) del móvil como función del tiempo *t* se llama ***función de posición***. Si sobre un cierto lapso de tiempo Δt, el objeto cambia su posición una cantidad

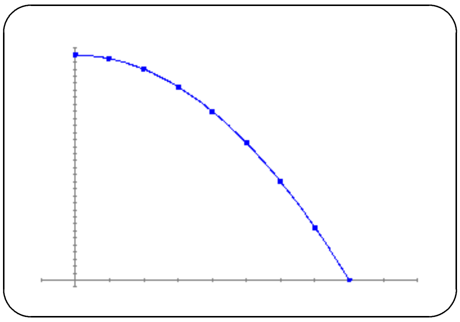
$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) \quad \text{Cambio de posición o desplazamiento}$$

entonces, llamaremos ***velocidad media*** del móvil en el intervalo $[t, t+\Delta t]$ a la ***tasa de variación media*** de la función de posición:

$$v_m[t, t+\Delta t] = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = \frac{\text{Cambio en la posición}}{\text{Cambio en tiempo}}$$

❑ ***EJEMPLO 14:***

Dejamos caer una piedra desde una altura de 320 m. La posición *s(t)* de la piedra en cada instante, respecto de un punto situado en el suelo, vendrá dada por la expresión:



$$s(t) = 320 - 5t^2$$

La cuestión que nos va a interesar resolver es: ***¿qué velocidad tiene esta piedra en el instante t=3 segundos?***

Para resolver dicha cuestión seguiremos los siguientes pasos:

1. *Determinaremos una tabla de valores de la función s(t):*

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s(t)	320	315	300	275	240	195	140	75	0

2. *Representación gráfica de la función s(t):*

eje de abcisas (*t* en segundos)

eje de ordenadas (*s(t)* en metros)

***3.** Determinaremos una fórmula que exprese la velocidad media entre un instante cualquiera* $3+\Delta t$ *y el instante t=3:*

La velocidad media en el intervalo $[3, 3+\Delta t]$ (o $(3+\Delta t, 3)$)es:

$$v_m[3, 3+\Delta 3] = \frac{s(3+\Delta 3)-s(3)}{\Delta t} = \frac{[320-5(3+\Delta t)^2]-[320-5\cdot 3^2]}{\Delta t} = \frac{-5(\Delta t)^2-30\Delta t}{\Delta t} = -5\Delta t - 30$$

***4.** Obtención de la velocidad media en distintos intervalos:*

3+Δt	s(3+Δt)	Δs=s(3)-s(3+Δt)	Δt	$v_{m=\Delta s/\Delta t}$
2	300	-25	1	-25
2,5	288'75	-13'75	0'5	-27'5
2,9	277'95	-2'95	0'1	-29'5
2,99	275'2995	-0'2995	0'01	-29'95
3	275'029995	-0'029995	0'001	-29'995
3	275'00299995	-0'00299995	0'0001	-29'9995

Tabla 1

3+Δt	s(3+Δt)	Δs=s(3+Δt)-s(3)	Δt	v_m=Δs/Δt
4	240	-35	1	-35
3'5	258'75	-16'25	0'5	-32'5
3'1	271'95	-3'05	0'1	-30'5
3'01	274'6995	-0'3005	0'01	-30'05
3'001	274'969995	-0'030005	0'001	-30'005
3'0001	274'99699995	-0'00300005	0'0001	-30'0005

Tabla 2

Observa que en el intervalo [3, 4] s la velocidad media es -35 m/s y que en el intervalo [2, 3] s la velocidad media es -25 m/s. En los siguientes intervalos [2'5, 3] y [3, 3'5] s, más breves, resulta ser -27'5 m/s y -32'5 m/s, respectivamente. A medida que descendemos en las columnas, con intervalos temporales más diminutos, observamos que la velocidad media se aproxima a un determinado valor que podemos estimar en -30 m/s.

5. El siguiente paso es definir el concepto de **velocidad instantánea.**

Los eruditos medievales no pudieron definir de forma adecuada la velocidad instantánea debido a que no tenían ninguna idea del proceso de *paso al límite.* No tuvieron en cuenta que Δ*s se haría muy pequeño cuando* Δ*t fuera también muy pequeño y, sin embargo el cociente* Δ*s*/Δ*t permanecería con valor apreciable.* En otras palabras, el valor al que se aproxima la velocidad media durante intervalos de tiempo que se hacen cada vez más pequeños, será la velocidad instantánea en ese momento.

$$v_i(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

Por consiguiente, en el ejemplo que nos ocupa:

$s'(t) = -10t$ de dónde deducimos que $s'(3) = v_i(3) = -30$ m/s.

➢ 6.2 Razón media y razón instantánea de cambio

Estas ideas pueden extenderse a situaciones más generales. Supongamos que y es una función de x, $y = f(x)$. Correspondiendo a un cambio de x a $x + \Delta x$, la variable y cambia en una cantidad $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Así el cociente de diferencias

$$\frac{\text{Cambio en y}}{\text{Cambio en x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

representa la razón media de cambio de y con respecto a x. Conforme el intervalo sobre el que estamos promediando se va acortando (esto es, conforme $\Delta x \to 0$), la razón media de cambio tiende a lo que intuitivamente llamamos ***razón instantánea de cambio de y con respecto a x,*** y el cociente de diferencias tiende a la derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Por tanto, la razón instantánea de cambio de y con respecto a x es precisamente la derivada $\frac{dy}{dx}$.

❑ ***EJEMPLO 15:***

Se estima que dentro de x años la población de una cierta comunidad será $P(x) = x^2 + 20x + 8.000$ personas.

a) ¿A qué ritmo cambiará la población dentro de 15 meses?

b) ¿Cuánto cambiará realmente la población durante el decimosexto mes?

SOLUCIÓN:

a) El ritmo de cambio de la población es la derivada de la función población. Esto es,

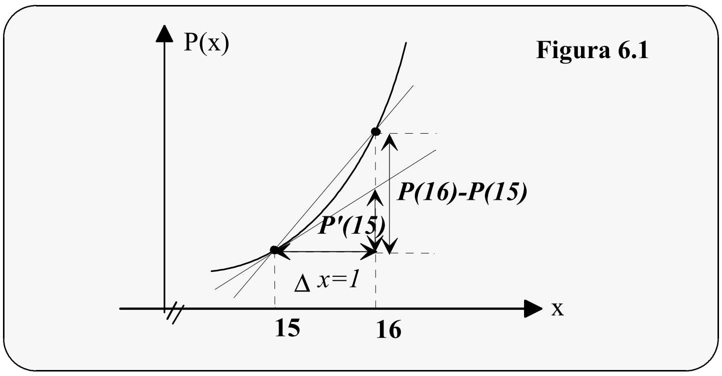
$$\textit{Ritmo de cambio} = P'(x) = 2x + 20$$

$$\textit{Ya que, } P'(15) = 2.15 + 20 = 50$$

se sigue que dentro de 15 meses la población habrá crecido a razón de 50 personas por mes.

b) El cambio real en la población durante el decimosexto mes es la diferencia entre la población pasados 16 meses y la población pasados 15 meses. Esto es,

Cambio en la población = P(16) - P(15) = 8.576 - 8.525 = 51 personas.



La razón para la diferencia en el ejemplo precedente entre el cambio real de población durante el decimosexto mes en la parte b) y el ritmo mensual de cambio al principio de cada mes en la parte a) es que el ritmo de cambio de la población variaba durante el mes. El ritmo instantáneo de cambio de la parte a) puede ser considerado como el cambio de población que sucedería durante el decimosexto mes si el ritmo de cambio de población permaneciera constante. La gráfica 6.1, de la página anterior, ilustra la situación:

En economía, la razón (instantánea) de cambio del coste total de producción con respecto al número total de unidades producidas se llama ***coste marginal***. Se mide en unidades monetarias (pesetas, dólares, etc.) por unidad y a menudo es una buena aproximación al coste de producir una unidad adicional.

Coste marginal = Función derivada del coste total

❑ ***EJEMPLO 16:***

Supongamos que el coste total en dólares de fabricar q unidades de un cierto artículo es $C(q) = 3q^2 + 5q + 10$.

a) Obtén una fórmula para el coste marginal.

b) ¿Cuál es el coste marginal cuando se han producido 50 unidades?

c) ¿Cuál es el coste real de producción de la quincuagésima unidad?

SOLUCIÓN:

a) El coste marginal es la derivada C'(q) = 6q + 5.

b) Cuando se han producido 50 unidades, q = 50 y el coste marginal es C'(50) = 6.50 + 5 = 305 dólares por unidad.

c) El coste real de producir la quincuagésima primera unidad es la diferencia entre el coste de producir 51 unidades y el de producir 50 unidades. Esto es,

$$C(51) - C(50) = 8.068 - 7.760 = 308 \text{ \textit{dólares.}}$$

Las respuestas a las partes b) y c) del ejemplo precedente fueron casi iguales porque los puntos (50, C(50)) y (51, C(51)) están próximos y en una porción de la curva de coste que es prácticamente lineal. Para tales puntos, la pendiente de la secante es una buena aproximación de la pendiente de la tangente. Debido a que la semejanza de las respuestas en las partes b) y c) es típica, y a que usualmente es más fácil calcular el coste marginal para un valor q que el coste total para dos valores de q, los economistas usan frecuentemente el coste marginal para aproximar el coste real de producción de una unidad adicional.

En general, en economía, el término ***análisis marginal*** se atribuye a la utilización práctica de la derivada de una función para estimar el cambio en la variable dependiente producido por un incremento de una unidad en el valor de la variable independiente.

En el siguiente ejemplo se usa el análisis marginal para estimar el efecto del crecimiento en una unidad en el valor de la fuerza de trabajo en la producción de una fábrica.

❑ ***EJEMPLO 17:***

Se estima que la producción semanal de una cierta fábrica es $Q(x) = -x^3 + 60x^2 + 1.200x$ unidades, donde x es el número de empleados en la fábrica. Generalmente hay 30 trabajadores empleados. Utiliza el análisis marginal para estimar el cambio en la producción semanal que resultará de añadir un trabajador más a la fuerza de trabajo.

SOLUCIÓN:

La derivada

$$Q'(x) = -3x^2 + 120x + 1.200$$

es el ritmo de cambio de la producción Q con respecto al número x de trabajadores. Para todo valor de x, esta derivada es una aproximación al número adicional de unidades que se producirán cada semana debido a la contratación del (x+1)-ésimo trabajador. Por tanto, el cambio en la producción semanal que resultará si el número de trabajadores es aumentado de 30 a 31 es aproximadamente

$$Q'(30) = -3(30)^2 + 120.30 + 1.200 = 2100 \text{ } \textit{unidades.}$$